АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ИНСТИТУТ НАУЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ

МАТЕМАТИКА

III

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ

РЕФЕРАТЫ
11В1—11В348

*

U. I. C. C.
AUG 20 1974
LIBRARY

№ 11 1961
ПРОИЗВОДСТВЕННО-ИЗДАТЕЛЬСКИЙ КОМБИНАТ ВИНИТИ
МОСКВА

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ

МАТЕМАТИКА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР доктор физ.-матем. наук *Р. В. Гамкрелидзе*

ЧЛЕНЫ РЕДКОЛЛЕГИИ: академик *П. С. Александров*, академик *А. Н. Колмогоров*, профессор *Л. Д. Кудрявцев*, профессор *В. И. Левин*, член-корреспондент АН СССР *Ю. В. Линник*, профессор *А. И. Маркушевич*, профессор *М. А. Наймарк*, профессор *В. В. Немыцкий*, профессор *С. М. Никольский*, академик *П. С. Новиков*, профессор *Д. Ю. Панов*, профессор *К. А. Рыбников*, член-корреспондент АН СССР *Н. В. Смирнов*, профессор *С. П. Фиников*

УЧЕНЫЙ СЕКРЕТАРЬ канд. физ.-матем. наук *Н. М. Остиану*

СОДЕРЖАНИЕ

Теория вероятностей и математическая статистика
Теория вероятностей 11В1
Математическая статистика 11В41
Теория игр, исследование операций и математическая экономика 11В133
Применение теоретико-вероятностных и статистических методов 11В169
Численные и графические методы 11В222
Таблицы 11В307
Вычислительные машины и математические приборы 11В324
Применение вычислительных машин . . . . . —
Авторский указатель

Адрес редакции: Москва, А-219, Балтийская улица, 14

Технический редактор *Л. Н. Беляновская*

Подписано в печать 17/XI-1961 г. Формат бумаги 84×108¹/₁₆ Тираж 1025

Печ. л. 4 Усл. печ. л. 6,56 Уч.-изд. л. 10,62 Заказ 3966

Производственно-издательский комбинат ВИНИТИ, г. Москва, Люберцы, Октябрьский пр., 403

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ

МАТЕМАТИКА

III. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ

Рефераты 11В1—11В348 № 11 Ноябрь 1961 г.

584 пс

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Редактор *О. В. Сарманов*

11 В1. Оценка случайности. Kiveliovitch M. L'estimation de la part du hasard. «Publs scient. et techn. Ministère air.», 1958, № N. T. 77, 7—8 (франц.)

Из урны, содержащей $(n+1)$ различных типов шаров (n может равняться счетной бесконечности) производятся вынимания с возвращением (относительная доля шаров k-го типа равна p_k $(k=0, \ldots, n)$). Строим ломаную кривую, вершинами которой являются точки, чьи абсциссы суть номера вынимания, а ординаты — номера вынутых при этом типов. $(k+1)$-фазой назовем отрезок ломаной между двумя ее последовательными экстремумами, содержащий k вершин. В статье приведены выражения для вероятности (относительной частоты) появления в этой ломаной экстремума, j-фазы, за которой следует i-фаза, возрастающей j-фазы (последние две вероятности для случаев $n=\infty$ или $p_k=p_0$). Дана формула для относительного числа пересечений ломаной с каждой из прямых $y=a_l$ $(i=1, \ldots, n;$ $i-1<a_l<i)$. Р. Ф. Матвеев

11 В2. Об эволюции случайных графов. Erdös P., Rényi A. On the evolution of random graphs. «Magyar tud. akad. Mat. kutató int. közl.», 1960, **A5**, № 1-2, 17—61 (англ.; рез. русск.)

Пусть даны n вершин графа. Для соединения их ребрами применяется вероятностный процесс, состоящий в том, что если k ребер уже выбраны, то любое из оставшихся $\binom{n}{a}-k$ ребер с одинаковой вероятностью может быть следующим ребром. Устанавливается связь между порядком роста функции $N=N(n)$—числа ребер при $n\to\infty$ и обладанием графом с определенной вероятностью одним из структурных свойств A (связность, число связных компонент, наличие в качестве подграфов деревьев, циклов данного порядка и т. д.). Для установления этой связи вводятся понятия граничных функций, которые существуют для важнейших свойств A. Две монотонно стремящиеся к $+\infty$ при $n\to\infty$ функции $A_1(n)$ и $A_2(n)$ называются граничными для свойства A, если

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A_2(n)}{A_1(n)}=0$$

и

$$\lim P_{n,N(n)}(A)=\begin{cases}0, \text{ если } \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{N(n)-A_1(n)}{A_2(n)}=-\infty,\\ 1, \text{ если } \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{N(n)-A_1(n)}{A_2(n)}=+\infty,\end{cases}$$

где $P_{n,N(n)}(A)$ — вероятность того, что случайный граф с n вершинами и $N(n)$ ребрами обладает свойством A. Для отдельных свойств имеется только одна граничная функция. В некоторых случаях существует функция распределения $G(y)$ $(-\infty<y<+\infty)$ такая, что если y — точка непрерывности $G(y)$, то

$$G(y)=\lim_{n\to\infty}P_{n,N(n)}, \text{ если } \lim_{n\to\infty}\frac{N(n)-A_1(n)}{A_2(n)}=y.$$

$G(y)$ называется строго граничной функцией распределения. Для различных свойств A находятся граничные функции и строго граничные функции распределения. Так, если A — свойство графа быть связным, то

$$A_1(n)=\frac{1}{2}n\log n,\ A_2(n)=n,$$

$$N(n)=\frac{1}{2}n\log n+yn+o(n),$$

$$G(y)=e^{-e^{-2y}}\ (-\infty<y<+\infty).$$

Указываются возможные применения случайным образом растущих графов к эволюции сетей связи, причем гипотезу равновероятности предлагается заменять более реалистической. В. Н. Сачков

11 В3. Некоторые соображения о плотности вероятности. Pagni Plinio. Alcune considerazioni sulla densità di probabilità. «Atti e mem. Accad. toscana sci. e lettere», 1959—1960, **24**, 1—28 (итал.)

В плоскости (x, y), в которой определена плотность $f(x, y)$, вводится криволинейная система координат (u, v). Линии $u=u_0$ сопоставляется число

$$H(u_0)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x(u_0, v),\ y(u_0, v))\left|\frac{D(x, y)}{D(u_0, v)}\right|dv,$$

которое называется плотностью вероятности на этой линии. Очевидно, $H(u_0)$ зависит от выбора системы (u, v). Аналогичные построения рассматриваются также в трех-

мерном пространстве. Указанные в статье применения новых понятий имеют чисто аналитический характер (преобразование кратных интегралов). Г. К. Энгелис

11 В4. Замечания о случайном гомоморфизме. Theodorescu R. Observaţii asupra omomorfismelor aleatoare. «An. Univ. «C. I. Parhon». Ser. ştiinţ. natur.», 1959, № 22, 55—58 (рум.; рез. русск., франц.)

В заметке рассматриваются гомоморфизмы булевой алгебры борелевских множеств действительной прямой в некоторую булеву σ-алгебру. Как показал Р. Сикорский, такие гомоморфизмы находятся во взаимно однозначном соответствии со случайными величинами на некотором вероятностном пространстве, если не различать величины, равные друг другу с вероятностью 1. Автор рассматривает гомоморфизмы, зависящие от параметра, что соответствует случайным функциям, и называет их случайными гомоморфизмами. Вводится интеграл от «случайного гомоморфизма» по вероятности, для чего нужно перейти к случайным величинам, проинтегрировать соответствующую случайную функцию и перейти обратно к гомоморфизмам. Выводятся простейшие свойства интеграла. А. Д. Вентцель

11 В5. Интегрирование множества характеристических функций по одному параметру. Ruegg Alain. Intégration d'un ensemble de fonctions caractéristiques par rapport à un paramètre. «C. r. Acad. sci.», 1959, **249**, № 4, 494—495 (франц.)

Рассматривается множество характеристических функций $\{\varphi_\omega(t)\}$, элементы которого непрерывно зависят от параметра ω. Формулируется без доказательства несколько теорем. Например,

Теорема 1. Пусть $\varphi_\omega(t)$ — характеристическая функция для любого вещественного значения ω, B-измеримая по ω для каждого конечного t'. Тогда $\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_\omega(t)\, dV(\omega)$ есть также характеристическая функция, относящаяся к функции распределения $F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_\omega(x)\, dV(\omega)$. Здесь $V(x)$ — некоторая функция распределения, а $F_\omega(x)$ — функция распределения, соответствующая $\varphi_\omega(t)$. В. П. Скитович

11 В6. О распределении вероятностей для малого числа векторов. Vincenz S. A., Bruckshaw J. McG. Note on the probability distribution of a small number of vectors. «Proc. Cambridge Philos. Soc.», 1960, **56**, № 1, 21—26 (англ.)

Чандрасекхар (Chandrasekhar S., Revs. Mod. Phys, 1943, 15, 1) показал, что сумма $R = \sum_{j=1}^{N} r_j$ независимых векторов r_j имеет плотность вероятностей

$$W_N(R) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \exp(-i\rho R)\, A_N(\rho)\, d\rho,$$

где n — размерность векторов, а $A_N(\rho)$ — преобразование Фурье

$$A_N(\rho) = \prod_{j=1}^{N} \int \tau_j(r_j) \exp(i\rho r_j)\, dr_j,$$

где $\tau(r_j)$ — плотность распределения вектора r_j. В частности, если $n = 3$ и каждый вектор r_j имеет фиксированную длину l, но случайное направление, то

$$W_N(R) = \frac{1}{2\pi^2 R} \int_0^\infty \sin \rho R \left(\frac{\sin \rho l}{\rho l}\right)^N \rho d\rho.$$

Эта функция есть полином степени $N-2$, деленный на R, с различными коэффициентами в разных интервалах значений R. Для этого случая выводится рекуррентная формула, выражающая $W_{N+1}(R)$ в виде некоторого интеграла от $W_N(R)$. Выписываются явные формулы для $W_N(R)$ при $N = 3, 4, \ldots, 8$, приводится ряд графиков и 1% и 5% уровни значимости для $|R|$. А. С. Монин

11 В7. О предельных теоремах теории вероятностей. Гнеденко Б. В. «Proc. Internat. Congr. Mathematicians, 1958». Cambridge, Univ. Press, 1960, 518—528

Обзор. Формулируются результаты советских математиков, опубликованные в 1953—1957 гг. Р. Л. Добрушин

11 В8. Необходимые и достаточные условия слабого закона больших чисел. Ehrenfeucht A., Fisz M. A necessary and sufficient condition for the validity of the weak law of large numbers. «Bull. Acad. polon. sci. Sér. sci. math., astron. et phys.», 1960, **8**, № 9, 583—585 (англ., рез. русск.)

Пусть $\{X_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ — последовательность взаимно независимых и одинаково распределенных случайных величин и $y_n = x_1 + \ldots + x_n$. Если существует такая константа a, что при любом $\varepsilon > 0$ имеет место

$$\lim_{n\to\infty} p\left(\left|\frac{y_n}{n} - a\right| > \varepsilon\right) = 0,$$

то говорят, что $\{X_i\}$ удовлетворяет слабому закону больших чисел.

Теорема. Для того чтобы последовательность $\{X_i\}$ удовлетворяла слабому закону больших чисел, необходимо и достаточно, чтобы характеристическая функция $\varphi(t)$ распределения случайной величины X_i была дифференцируема в точке $t = 0$ и имело место $\varphi'(0) = ai$.

Теорема представляет собой обобщение известного результата А. Н. Колмогорова (Kolmogorov A., Math. Ann., 1929, **102**, 484—488). Библ. 3 назв.

Н. В. Яровицкий

11 В9. Об одной одномерной задаче о случайном заполнении пространства. Rényi Arfréd. Egy egydimenziós véletlen térkitöltési problémáról. «Magyar tud. akad. Mat. kutató int. közl.», 1958, **3**, № 1-2, 109—127 (венг.; рез. русск., англ.)

Исследуется случайная величина ν_x — число единичных непересекающихся интервалов, помещаемых последовательно внутри отрезка $(0, x)$ случайным образом (центр единичного интервала имеет равномерное распределение на отрезке $(1/2, x - 1/2)$); при этом интервал, пересекающийся с уже помещенными, просто отбрасывается. Доказывается, что математическое ожидание $M(x)$ случайной величины ν_x удовлетворяет функциональному уравнению

$$M(x+1) = \frac{2}{x} \int_0^x M(t)\, dt + 1$$

с начальным условием $M(x) = 0$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$. Изучается асимптотическое поведение $M(x) = Cx - (1-c) + o\left(\frac{1}{x^n}\right)$ при $x \to \infty$, где

$$C = \int_0^\infty \exp\left(-2\int_0^t \frac{1 - e^{-u}}{u}\, du\right) dt \approx 0{,}748.$$

С. М. Броди

11 В10. О многомерной локальной предельной теореме для решетчатых распределений. Миталаускас А. А. «LietTSR Mokslų Akad. darbai», «Тр. АН ЛитССР», 1960, **B2**, (22), 3—14 (рез. лит.)

Для последовательности $\xi^{(k)} = \left(\xi_1^{(k)}, \ldots, \xi_s^{(k)}\right)$, $k = 1, 2, \ldots$, независимых случайных s-мерных векторов, компоненты которых принимают только целочисленные значения, положим

$$M\xi_1^{(k)} = a_i^{(k)},\ b_{ij}^{(k)} = M\left\{\left(\xi_i^{(k)} - a_i^{(k)}\right)\left(\xi_j^{(k)} - a_j^{(k)}\right)\right\},$$

$$\sum_{k=1}^{n} \xi^{(k)} = \zeta^{(n)} = \left\{\zeta_1^{(n)}, \ldots, \zeta_s^{(n)}\right\},$$

$$P\left\{\zeta_1^{(n)} = z_1, \ldots, \zeta_s^{(n)} = z_s\right\} = p_n(z_1, \ldots, z_s),$$

$$M\zeta_i^{(n)} = A_i^{(n)},\ B_{ij}^{(n)} = M\left\{\left(\zeta_i^{(n)} - A_i^{(n)}\right)\left(\zeta_j^{(n)} - A_j^{(n)}\right)\right\},$$

и условимся говорить, что для последовательности $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \ldots$ имеет место локальная предельная теорема, если при $n \to \infty$ равномерно относительно

$$z_1, \ldots, z_s \sqrt{B_{11}^{(n)} \ldots B_{ss}^{(n)}}\, P_n(z_1, \ldots, z_s) - p\left(z_1', \ldots, z_s'\right) \to 0,$$

где

$$p(x_1, \ldots, x_s) = (2\pi)^{-\frac{s}{2}} \Lambda^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{\frac{(B^{-1}x, x)}{2}\right\},$$

$z_i' = \dfrac{z_i - A_i^{(n)}}{\sqrt{B_{ii}}}$ и B — матрица ковариаций случайных величин $\zeta_1^{(n)}, \ldots, \zeta_s^{(n)}$, а Λ — ее определитель, и будем также говорить, что для последовательности $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \ldots$ имеет место локальная предельная теорема в усиленной форме, если для любой последовательности, отличающейся конечным числом членов от заданной, имеет место локальная предельная теорема. При этих предположениях и обозначениях устанавливается следующий результат. Если $B_{ii}^{(n)} \to \infty$ при $n \to \infty$, $i = 1, \ldots, s$, $\Lambda > c$, где $c > 0$ и не зависит от n, и

$$\frac{1}{b_{ii}^{(k)}} \sum_{|j_i - a_i^{(k)}| < N} \left(j_i - a_i^{(k)}\right)^2 P\left\{\xi_i^{(k)} = j_i\right\} \to 1$$

при $N \to \infty$, $i = 1, \ldots, s$, равномерно по k, то, для того чтобы для последовательности $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \ldots$ имела место локальная предельная теорема в усиленной форме, необходимо и достаточно, чтобы для всех целых q и всех векторов $(a_1, \ldots, a_s)$ с целочисленными компонентами таких, что общий наибольший делитель $(a_1, \ldots, a_s, q) = 1$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \min_{0 \leqslant m < q} P\left\{a_1\xi_1^{(k)} + \ldots + a_s\xi_s^{(k)} \not\equiv m \pmod q\right\} = \infty.$$

Б. А. Рогозин

11 В11. О локальных теоремах для больших уклонений. Петров В. В. «Докл. АН СССР», 1960, **134**, № 3, 525—528

Рассматривается последовательность независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$, имеющих одинаковое распределение с конечной дисперсией $\sigma^2 > 0$ и математическим ожиданием 0. Положим $S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i / \sigma\sqrt{n}$, $F_n(x) = P\{S_n < x\}$, $\varphi(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} / \sqrt{2\pi}$. При этих условиях приводится следующий результат. Пусть при некотором n_0 существует ограниченная плотность распределения $p_{n_0}(x)$ величины S_{n_0}. Если выполнено условие $M\{\exp|\xi_1|^{\frac{4\alpha}{2\alpha+1}}\} < \infty$ при некотором α, $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, то при $|x| \leqslant \dfrac{n^\alpha}{\rho(n)}$, где $\rho(n)$ — любая монотонная функция такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(n) = \infty$, имеем при $n \to \infty$ равномерно относительно x

$$\frac{F_n(x)}{\varphi(x)} = \exp\left\{\frac{x^3}{\sqrt{n}} \lambda^{[s]}\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right\}(1 + o(1)), \qquad (1)$$

где s — целое неотрицательное число, определенное неравенствами

$$\frac{s}{2(s+2)} < \alpha \leqslant \frac{s+1}{2(s+2)},$$

и

$$\lambda^{[0]}(t) = 0,\ \lambda^{[s]}(t) = \sum_{k=0}^{s-1} c_k t^k,$$

причем c_k выражаются через семиинварианты $\gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_{k+3}$ случайной величины ξ_1 точно так же, как коэффициенты ряда Крамера в его известной теореме о больших уклонениях (Cramer H., Actual. scient et industr., 1938, № 736), и обратно, если соотношение (1) имеет место при $n \to \infty$, $|x| \leqslant n^\alpha \rho(n)$ и некотором целом $s \geqslant 0$, равномерно относительно x, где $\rho(n)$ — некоторая монотонная функция и α — некоторое число, такие что $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(n) = \infty$, $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, то при данном α $M\{\exp|\xi_1|^{\frac{4\alpha}{2\alpha+1}}\} < \infty$. Аналогичные результаты пригодятся для решетчатых случайных величин, и в заключении они переносятся на неодинакого распределенные случайные величины. Б. А. Рогозин

11 В12. Колебательное предельное поведение случайной последовательности. Anselone P. M., Porcelli P. Oscillatory limiting behavior of a random sequence. «Amer. Math. Monthly», 1960, **67**, № 6, 565—566 (англ.)

Пусть $x_0, x_1, x_2, \ldots$ есть последовательность случайных величин, определенная на последовательности независимых одинакого распределенных векторов (R_0, W_0), $(R_1, W_1), \ldots$, имеющих неотрицательные целочисленные компоненты, следующим образом

$$x_n = R_k, \text{ если } \sum_{h=0}^{k=1} W_h \leqslant n < \sum_{h=0}^{k} W_h.$$

Для $\{p_{in} = P\{x_n = i\}\}_{n=0}^{\infty}$ устанавливается, что при специальном выборе последовательности векторов не существует даже обобщенного предела в смысле Чезаро, и $\lim\limits_{n\to\infty} p_{1n} = 0$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} p_{1n} = 1$. Б. А. Рогозин

11 В13. Класс форм Тёплица и его применение в теории вероятностей. Spitzer F. L., Stone C. J., A class of Toeplitz forms and their application to probability theory. «Illinois J. Math.», 1960, **4**, № 2, 253—277 (англ.)

Пусть $\ldots c_{-1}, c_0, c_1 \ldots$ — последовательность неотрицательных чисел, удовлетворяющих следующим условиям $c_k = c_{-k}$ для $k = 0, \pm 1, \ldots$, $\sum_{-\infty}^{\infty} c_k = 1$, $0 < \sum_{-\infty}^{\infty} k^2 c_k = \sigma^2 < \infty$ и случайная величина ξ, $P\{\xi = k\} = c_k$, имеет максимальный шаг распределения, равный 1. Рассматривается последовательность матриц Тёплица $T(N) = (T_{ij}(N))$, $N = 0, 1, \ldots$, где $T_{ij}(N) = c_{|i-j|}$, $i, j = 0, \ldots, N$. Для коэффициентов p_{kn} многочленов $p_n(z) = \sum_{k=0}^{n} p_{kn} z^k$, удов-

летворяющих следующим условиям: для каждого целого $n \geqslant 0$ $p_n(z)$ есть многочлен степени n, в котором коэффициент при z^n является положительным, и

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} p_n(z)\overline{p_m(z)}\,[1-\varphi(z)]\,d\theta = \delta_{nm},$$

где $z = e^{i\theta}$, $n, m = 0, 1, 2, \ldots$, и $\varphi(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k$, $|z| = 1$, находится следующее выражение

$$\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\,p_{kn} = \frac{k}{n} + o(1),$$

при этом $o(1)$ является функцией k и n, определенной для $0 \leqslant k \leqslant n < \infty$ такой, что $o(1) \to 0$ равномерно по k и n, когда $n - k \to \infty$. Из предыдущего выводятся некоторые следствия, из которых упомянем два:

$$\frac{\sigma^2}{2n}\,[I - T(n)]^{-1}_{kj} = R\left(\frac{k}{n}, \frac{j}{n}\right) + o(1),$$

где $R(x, y) = \min(x, y) - xy$ и $o(1)$ является функцией k и j, стремящейся к 0 при $n \to \infty$, равномерно по $0 \leqslant k, j \leqslant n$, и

$$\lim_{n\to\infty} n^{-2p}\sum_{k=1}^{n+1}\left(\frac{1}{1-\lambda_{nk}}\right)^p = \left(\frac{2}{\pi^2\sigma^2}\right)^p \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2p},$$

где λ_{nk}, $k = 1, 2, \ldots, n+1$, есть собственные значения матрицы $T(n)$. Последний параграф посвящен применению теоремы и ее следствий к теории вероятностей. Для случайной величины N_{kj}, равной числу попаданий в состояние j последовательности $s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$, прежде чем она покинет интервал $[-n, n]$, где $s_0 = k$, $s_n = s_0 + \xi_1 + \ldots + \xi_n$ и $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин, распределенных как ξ, находятся некоторые предельные характеристики при $n \to \infty$, так

$$\lim_{n\to\infty} nP\{N_{jj} = 0\} = \sigma^2,$$

$$\lim_{n\to\infty} P\{n^{-1}N_{0j} < x\} = \begin{cases} 1 - e^{-\sigma^2 x}, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

для каждого фиксированного $j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Для случайной величины M_n, равной числу различных точек, которые посетит последовательность $s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$, прежде чем покинет интервал $[-n, n]$, находится, что

$$\lim_{n\to\infty} M\left\{\frac{M_n}{2n}\right\} = \ln 2.$$

В заключении при $s_0 = 0$ дается простое доказательство известного соотношения

$$\lim_{n\to\infty} P\{\max_{1\leqslant k\leqslant n} |s_k| < x\sigma\sqrt{n}\} = \frac{4}{\pi}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{2j+1}\times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{(2j+1)^2\pi^2}{8x^2}\right\}.$$

Б. А. Рогозин

11 В14. Однородные стохастические процессы. Woll John W., Jr. Homogeneous stochastic processes. «Pacif. J. Math.», 1959, 9, № 1, 293—325 (англ.)

Пусть X — локально компактное хаусдорфово пространство, а G — такая группа гомеоморфизмов X, что для всяких двух элементов x_1 и x_2 из X найдется $g \in G$, для которого $x_2 = g[x_1]$. Марковский процесс в X однороден, если его переходные вероятности $P(t, x, dy)$ удовлетворяют соотношению

$$P(t, x, dy) = P(t, g[x], g[dy])$$

для всех $g \in G$. Доказывается, что в тех случаях, когда X сепарабельно или когда G — коммутативная группа, существует мера $Q_x(dy)$ такая, что для всякой непрерывной на X функции $f(x)$, обращающейся в нуль в некоторой окрестности точки x,

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int f(y)\,P(t, x, dy) = \int f(y)\,Q_x(dy). \qquad (1)$$

В предположении, что существует мера Q_x, удовлетворяющая (1), доказано отсутствие разрывов второго рода у сепарабельного процесса. Введен обобщенный процесс Пуассона и исследованы условия, при которых процесс может быть полу ен как предел обобщенных пуассоновских процессов. Рассмотрены некоторые свойства непрерывных процессов. Исследуется понятие подчиненности по Бохнеру (Bochner S., Harmonic analysis and theory of probability, Univ. of California Press, Berkeley, Angeles, 1955). А. В. Скороход

11 В15. Уточнение локальной теоремы для однородной цепи Маркова с непрерывным множеством состояний. Жанбырбаев Б. «Уч. зап. Казахск. гос. пед. ин-т», 1960, 22, № 2, 3—10

Пусть $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$, — последовательность случайных величин, связанных в однородную цепь Маркова и принимающих значения из отрезка $[a, b]$ с плотностью вероятностей перехода $p(x, y)$, которая удовлетворяет следующим условиям: А) $p(x, y)$ непрерывна в прямоугольнике $[a \leqslant x, y \leqslant b]$; В) для любой пары точек x и y из $[a, b]$ найдется такое r, что r-я итерация $p(x, y)$ положительна. Пусть

$$c = -\frac{1}{D(1)}\int_a^b xD\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} 1 \Big) dx,$$

$$\sigma^2 = \frac{\partial^2\lambda_0(\theta)}{\partial\theta^2}\Big|_{\theta=0},$$

где $D(\lambda)$, $D\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\lambda\Big)$ — целые функции Фредгольма, соответствующие ядру $p(x, y)$, $\lambda_0(\theta)$ — собственное значение, соответствующее ядру $p(x, y)\exp(i\theta y)$, причем $\lambda_0(0) = 1$. Пусть $p_n(x)$ — плотность распределения случайной величины

$$\frac{\xi_0 + \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n - (n+1)c}{\sigma\sqrt{n}}.$$

Доказывается следующая

Теорема.

$$\sqrt{2\pi n}\,p_n(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} + \sum_{\nu=1}^{k} n^{-\frac{\nu}{2}} Q_\nu(x)\,e^{-\frac{x^2}{2}} + O\left(n^{-\frac{k+1}{2}}\right),$$

где $Q_\nu(x)$ — некоторые многочлены, коэффициенты которых выражаются через моменты начального распределения и производные $\lambda_0(\theta)$ в 0. С. В. Нагаев

11 В16. О локальной теореме для однородной цепи Маркова с непрерывным множеством состояний. Жанбырбаев Б. «Уч. зап. Казахск. гос. пед. ин-т», 1960, 22, № 2, 11—13

В условиях и при обозначениях предыдущего реферата формулируется следующая

Теорема. Для любых положительных p и q

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|p_n(x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\right|^p |x|^q dx = \frac{\lambda(p, q)}{(\sqrt{2\pi n})^p} + O\left(\frac{1}{n^{p/2}}\right),$$

где

$$\lambda(p, q) = \int_{-\infty}^{\infty}\left|\alpha x + \frac{\beta_3}{6}(x^3 - 3x)\right|^p |x|^q e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

$$\alpha = -i\frac{\partial}{\partial\theta}\ln A(\theta)$$

$$A(\theta) = \int_a^b\int_a^b Q_0(x)\, u_0(x,\ \theta)\, v_0(t,\ \theta)\, e^{i\theta t}\, dx\, dt,$$

а $u_0(x, \theta)$ и $v_0(t, \theta)$ — решения интегрального уравнения с ядром $p(x, y)\exp(i\theta y)$ и сопряженного с ним, соответствующие собственному значению $\lambda_0(\theta)$, которое стремится к 1 при $\theta \to 0$, $Q_0(x)$ — плотность начального распределения. С. В. Нагаев

11 В17. Об асимптотике некоторых функционалов в двумерной схеме блуждания. Королюк В. С. «Докл. АН СССР», 1960, 135, № 3, 520—523

Пусть в плоскости E определено случайное блуждание с плотностью вероятностей величины скачка за один шаг $p_\varepsilon(x, y)$, зависящей от малого параметра ε ($\varepsilon > 0$). Для некоторого класса функций $f(x, y)$ из интегрального уравнения

$$\iint_E u_\varepsilon(x + \varepsilon\xi;\ y + \varepsilon\eta)\, p_\varepsilon(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta - u_\varepsilon(x, y) = 0 \quad (x > 0)$$

с условием

$$u_\varepsilon(x, y) = f(x, y) \text{ при } x \leqslant 0$$

определяется функционал $u_\varepsilon(x, y) = u_\varepsilon(x, y; f)$, являющийся математическим ожиданием значения функции f в точке первого выхода в полуплоскость $x \leqslant 0$ из точки (x, y) правой полуплоскости. При некоторых предположениях имеет место асимптотическое разложение

$$u_\varepsilon(x, y; f) = \sum_{k=0}^{N} \varepsilon^k u_k(x, y) + \sum_{k=0}^{N-1} \varepsilon^{k+1} v_k\left(\frac{x}{\varepsilon}, y\right) + O(\varepsilon^{N+1}),$$

где функции $u_k(x, y)$ и $v_k(z, y)$ определяются с помощью некоторых дифференциальных или интегральных уравнений, не зависимых от параметра ε. Е. Csáki

11 В18. Влияние диссипативной части общего марковского процесса. Chacon R. V. The influence of the dissipative part of a general Markov process. «Proc. Amer. Math. Soc.», 1960, 11, № 6, 957—961 (англ.)

Пусть X — пространство точек $x, y, \ldots$ и F — поле его подмножеств. Пусть $P(x, A)$ — марковская переходная функция. Определим преобразование T в банаховом пространстве конечных мер m уравнением

$$Tm(A) = \int_X P(x, A)\, m(dx).$$

Предположим, что существует мера m' такая, что множество $M_{m'}$ m'-абсолютно непрерывных мер переводится в себя. Пусть L_1 — банахово пространство всех m'-интегрируемых функций. Определим преобразование L^*L_1 в себя следующим образом:

$$Tm''(A) = \int_A L^* f m'(dx),$$

если

$$m''(A) = \int_A f m'(dx).$$

Пусть C и D — соответственно консервативная и диссипативная части X относительно L^*,

$$L_C^* f = e_C L^* f,\ L_D^* f = e_D L^* f,$$

где e_C и e_D — характеристические функции C и D,

$$L_{D,n}^* = \sum_0^{n-1} L_D^{*k},\quad M_n^* = L_C^* L_{D,n}^*,$$

$$L_n^*(f, p) = \sum_0^{n-1} L^{*k} f \Big/ \sum_0^{n-1} L^{*k} p.$$

В работе дается положительный ответ на вопрос Хопфа: равен ли почти всюду 0 на C

$$\lim_{n\to\infty} L_n^\infty(f - f', p), \text{ где } f' = \lim_{n\to\infty} M_n^* f.$$

С. В. Нагаев

11 В19. Слабая и сильная сходимость для марковских процессов. Foguel S. R. Weak and strong convergence for Markov processes. «Pacif. J. Math.», 1960, 10, № 4, 1221—1234 (англ.)

Пусть (Ω, Σ, P) — вероятностное пространство и $x_t(\omega)$ — определенный на нем действительный марковский процесс (t пробегает либо отрезок $[0, \infty]$, либо неотрицательные целые числа). Пусть B_t — замкнутое подпространство, порождаемое характеристическими функциями множеств вида $x_t^{-1}(A)$, где A — борелевское множество на прямой, T_t — оператор, переводящий B_0 в B_t и определяемый для характеристических функций уравнением

$$T_t \chi_{x_0 \in A} = \chi_{x_t \in A}.$$

Положим

$$C_0 = \bigcap_{m=0}^{\infty} B_m,\ C_{-m} = T_m^{-1} C_0,\ H = \bigcap_{m=1}^{\infty} C_{-m}$$

Основным результатом является следующая

Теорема. Если H порождается счетным множеством ортогональных характеристических функций $\{\chi_i\}$, то для любого $y \in B_0$ такого, что $(y, \chi_i) \neq 0$ для конечного числа χ_i существует целое m такое, что m последовательностей

$$\{T_{km+d} y\},\ d = 1, 2, \ldots, m,$$

слабо сходятся (в смысле $L_2(\Omega, \Sigma, P)$).

Кроме того, изучается сильная сходимость $T_t x$. При этом предполагается выполнимым следующее условие. Существует $t_0 > 0$ такое, что пространство $B_0 \cap B_{t_0}$ конечномерно и угол между $B_{t_0} - B_0 \cap B_{t_0}$ и $B_0 - B_0 \cap B_{t_0}$ положителен (угол между двумя подпространствами B^* и B^{**} называется положительным, если $\sup(b^*, b^{**}) < 1$, $\| b^* \| = \| b^{**} \| = 1$, $b^* \in B^*$, $b^{**} \in B^{**}$).

С. В. Нагаев

11 В20. Об условных марковских процессах. Лян Чжи-шуэн. «Теория вероятностей и ее применения», 1960, 5, № 2, 227—228 (рез. англ.)

Пусть (x_t, y_t) — двумерный марковский процесс, причем x_t отдельно также является марковским процессом. В заметке формулируется следующий результат. Рассмотрим условную вероятность $V_t^s(\omega, y, \Gamma)$ того, что $y_t \in \Gamma$, при условии, что $y_s = y$ и что фиксировано течение процесса x_u в промежутке от s до t. Эту условную вероятность можно выбрать так, чтобы с вероятностью 1 выполнялось уравнение Чепмена — Колмогорова

$$V_u^s(\omega, y, \Gamma) = \int V_t^s(\omega, y, d\zeta)\, V_u^t(\omega, \zeta, \Gamma).$$

А. Д. Вентцель

11 В21. Почти периодические марковские процессы. Jacobs Konrad. Fastperiodische Markoffsche Prozesse. «Math. Ann.», 1958, 134, № 5, 408—427 (нем.)

Рассматривается измеримое пространство (E, B) и банахово пространство F ограниченных B-измеримых функций на E с нормой $\|f\| = \sup_{x \in E} |f(x)|$. Марковский процесс, определенный в (E, B) и имеющий переходную функцию $P(s, x, t, \Gamma)$, называется почти периодическим, если для всех неотрицательных a и b почти периодична операторная функция $P(a+t, b+t)$ (здесь $t \geqslant s \geqslant 0$, а оператор $P(s, t)$ определен формулой: $P(s, t) f(x) = \int f(y) P(s, x, t, dy)$). Автор предполагает существование пары чисел s_0 и t_0 $(t_0 > s_0)$, для которых оператор $P^*(s_0, t_0)$, сопряженный к оператору $P(s_0, t_0)$, удовлетворяет известному условию Крылова — Боголюбова (Kryloff N., Bogoliouboff N., C. R. Acad. Sci., 1937, 204, 1454—1456). Кроме того, от операторов $P^*(0, t)$ требуется выполнение некоторого условия непрерывности. При этих предположениях доказано, что для почти периодического процесса и для любой меры μ можно указать такую меру μ_s, для которой норма $\|P^*(s, t)\mu - \mu_s\|$ при $t \to \infty$ стремится к нулю экспоненциально быстро. Случай почти периодического дискретного по времени процесса рассматривался ранее (РЖМат, 1961, 9В52). М. Г. Шур

11 В22. Случайный процесс (с непрерывным временем) и его применение к теории очередей. Heathcote C. R., Moyal J. E. The random walk (in continuous time) and its application to the theory of queues. «Biometrika», 1959, 46, № 3-4, 400—411 (англ.)

Рассматривается случайное блуждение частицы на прямой, для которого $P_{k,n}(t)$ — вероятность перехода из точки k в точку n удовлетворяет уравнению

$$\frac{dP_{k,n}(t)}{dt} = -(\lambda + \mu) P_{k,n}(t) + \lambda P_{k_n+1,\, n}(t) + \mu P_{k-1,n}(t),$$

где λ и μ — соответственно вероятности переместиться частице на единицу вправо или влево. Рассматриваются решения этого уравнения при различных граничных условиях. Сколько-нибудь существенных новых результатов работа не содержит. В. П. Скитович

11 В23. К теории ветвящихся процессов. Schneider B. Beitrag zur Theorie der Verzweigungsprozesse. «Metrika», 1960, 3, № 2, 128—142 (нем.; рез. англ.)

Развивается математический аппарат для описания ветвящихся случайных процессов, зависящих от непрерывного параметра x. Для таких процессов вместо (случайного) числа z_n элементов в n-м поколении целесообразно ввести случайную функцию, $Z(x, t)$ — число элементов в момент t со значением параметра $\leqslant x$, и рассматривать функции $f_1, f_2, \ldots$, определяемые соотношениями вида

$$f_1(x, t)\, dx = E[dZ(x, t)],$$

$$f_2(x_1, x_2, t)\, dx_1 dx_2 = E[dZ(x_1, t)\, dZ(x_2, t)].$$

Производные по x от $Z(x, t)$ являются при этом обобщенными случайными функциями. В этой связи определяется понятие аддитивной случайной функции множеств $Z(B)$ и ее производной в среднем квадратичном $\overline{z}(x)$, и доказывается, что такая производная существует, если возможно представление ковариации функции $Z(B)$ в виде интеграла Лебега — Стилтьеса

$$E[Z_i(B_1) Z_j(B_2)] = \iint_{B_1 B_2} d^2 r_{ij}(x, x'),$$

где $r_{ij}(x, x')$ — функция с ограниченным колебанием. А. С. Монин

11 В24. О дифференцируемости переходных вероятностей однородного марковского процесса со счетным числом состояний. Юшкевич А. А. «Уч. зап. МГУ», 1959, вып. 186, 141—159

Доказывается строгая марковость однородных марковских процессов со счетным числом состояний. Это свойство используется для доказательства существования конечных производных у переходных вероятностей процесса $p_{ik}(t)$ при $t > 0$, если только конечен один из пределов

$$\lim_{t \to 0} \frac{1 - p_{ii}(t)}{t}, \quad \lim_{t \to 0} \frac{1 - p_{kk}(t)}{t}.$$

Если оба эти предела конечны, то производная $p'_{ik}(t)$ будет абсолютно непрерывной. Строится пример, когда $p_{ik}(t)$ имеет бесконечную вторую производную. А. В. Скороход

11 В25. Построение процесса Феллера и Мак-Кина, исходя из броуновского движения. Lévy Paul. Construction du processus de W. Feller et H. P. McKean en partant du mouvement Brownien. «Probability and statistics. Stockholm, Almqvist and Wiksell; New York, John Willey and Sons», 1959, 162—174 (франц.)

С помощью замены времени из винеровского процесса строится сепарабельный марковский процесс со стационарными вероятностями перехода и со счетным числом состояний, причем все его состояния являются мгновенными. В. Ф. Писаренко

11 В26. Случайные псевдоинтегралы Стилтьеса. Kampé de Fériet Joseph. Pseudo-intégrales de Stieltjes aléatoires. «C. r. Acad. sci.», 1961, 252, № 15, 2162—2165 (франц.)

Изложен метод суммирования интеграла $\int_0^\infty F(t)\, dW(t)$ (где $W(t)$ — броуновский процесс) такой, что «интегральные суммы» сходятся с вероятностью 1 для любой $F(t) \in L^2(0, \infty)$. Метод основан на полученном автором ранее представлении

$$W(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \eta_{m,n} \cdot e_n(t - m + 1),$$

где $\{e_n(t)\}$ — базис Шаудера для банахова пространства $C[0, 1]$ с топологией равномерной сходимости, а $\eta_{m,n}$ — некоторые линейные комбинации значений $W(t)$ в трех точках (зависящих от m, n). Подставляя это выражение для $W(t)$ в интеграл и формально меняя местами интеграл и суммы, получим ряд, сходящийся с вероятностью 1 к гауссовой случайной величине с параметрами

$$\left\{0, \left[\int_0^\infty P^2(t)\, dt\right]^{1/2}\right\}.$$

Р. Ф. Матвеев

11 В27. О преобразовании одного класса случайных процессов с помощью абсолютно непрерывной замены меры. Гирсанов И. В. «Теория вероятностей и ее применения», 1960, 5, № 3, 314—330 (рез. англ.)

Исследуется замена меры на множестве элементарных событий следующего вида

$$\widetilde{P}(E) = \int_E \exp\{\xi_0^1(\varphi)\}\, dP,$$

здесь P — исходная мера, E — измеримое подмножество Ω, $\widetilde{P}$ — новая мера,

$$\xi_t^s(\varphi) = \sum_{i,j} \int_t^s \varphi^i(u, \omega)\, b_{ij}\, d\xi^j(u, \omega) - \int_t^s \frac{1}{2} \left(\sum_i \varphi^i(u, \omega)^2\right) du, \qquad (1)$$

$\xi^j(t, \omega)$ — компоненты n-мерного броуновского движения, а $\varphi^i(u, \omega)$ — случайные функции такие, что $\varphi^i(u, \omega)$

при $u \leqslant t$ не зависит от $\xi^j(s,\omega) - \xi^j(t,\omega)$ при $s \geqslant t$. Полученные результаты применяются к изучению условий абсолютной непрерывности мер, соответствующих марковским процессам, являющимся решениями стохастических уравнений Ито. Если $x_1(t)$ и $x_2(t)$ — два марковских процесса, удовлетворяющих уравнению

$$x_l(t,\omega) = x(0,\omega) + \int_0^t B(s, x_l(s,\omega))\, d\xi(s,\omega) + \int_0^t A_l(s, x_l(s,\omega))\, ds,$$

где $B(s,x)$ — n-мерная матрица, $\xi(s,\omega)$ — n-мерное броуновское движение, $A_l(s,x)$ — векторы, причем

$$A_2(s,x) = A_1(s,x) + B(s,x) f(s,x),$$

тогда, обозначая через μ_l меры, соответствующие процессам $x_l(t,\omega)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, можно утверждать, что при весьма общих условиях

$$\frac{d\mu_2}{d\mu_1} = \exp\left\{\overset{1}{\underset{0}{\zeta}}(\varphi)\right\},$$

где $\overset{1}{\underset{0}{\zeta}}(\varphi)$ — выражение вида (1), в котором φ^i определяются через f и матрицу B. А. В. Скороход

11 В28. Марковские процессы и потенциалы. Ч. II. Hunt G. A. Markoff processes and potentials. II. «Illinois J. Math.», 1957, 1, № 3, 316—369 (англ.)

Часть I. РЖМат, 1961, 4В15. Реферируемая часть работы Ханта посвящена исследованию марковских процессов $x_t(\omega)$, траектории которых обрываются в случайный момент времени $R_x(\omega)$. Момент обрыва определяется по измеримому множеству A и неотрицательной функции $a(x)$ как нижняя грань тех τ, для которых или $x_\tau(\omega) \in A$ или

$$\int_0^\tau a(x_t(\omega))\, dt \geqslant Z_x(\omega),$$

где $Z_x(\omega)$ — не зависимая от процесса показательно распределенная случайная величина. В работе строится теория потенциала для этого класса процессов, в частности теория потенциала для процессов, траектории которых обрываются в момент достижения некоторого множества. Выводятся уравнения, связывающие потенциалы процессов, которые отличаются только моментами обрывов. Как и в первой части, подробно изучаются эксцессивные функции этих процессов, на них переносятся основные теоремы первой части. При этом при определении регулярных точек множества приходится рассматривать только те точки, для которых вероятность мгновенного обрыва равна нулю. При таком определении сохраняется основное неравенство

$$\inf_E \varphi(x) \leqslant \varphi(r) \leqslant \sup_E \varphi(x)$$

для регулярных относительно E точек r. Интересные результаты получаются при дополнительных ограничениях на процесс. Открытое в естественной топологии множество с компактным замыканием автор называет особым, если для всех его точек вероятность не оборваться за фиксированное время (0τ) больше некоторого δ. Автор вводит две дополнительные гипотезы: (D) траектории процесса с вероятностью 1 выходят из любого особого множества, и (E) — среднее время пребывания во всяком особом множестве конечно. При этих предположениях более полно исследуется связь эксцессивных функций и потенциалов. Доказывается, в частности, что (D) следует из (E) и инвариантности множества функций, стремящихся к нулю на бесконечности. Исследуются также эксцессивные меры обрывающихся процессов; с помощью теоремы Хилла—Иосида проводится построение процесса по его потенциалу, при этом потенциал определяется как оператор в функциональном пространстве, удовлетворяющий некоторым требованиям типа принципа максимума. Последний раздел работы посвящен процессам с возрастанием массы. И. В. Гирсанов

11 В29. Убывающие полумартингалы с частично упорядоченной областью параметров. Krickeberg Klaus. Absteigende Semimartingale mit filtrierendem Parameterbereich. «Abhandl. Math. Seminar Univ. Hamburg», 1960, 24, 109—125 (нем.)

Рассматривается совокупность $\{f_\tau\}$ случайных величин, измеримых относительно σ-алгебры B, на которой задана мера μ, и где τ принадлежит некоторому частично упорядоченному отношением $\ll$ множеству θ. При этом f_τ является измеримой относительно $B_\tau \subseteq B$, для $\rho \ll \tau$ $B_\tau \subseteq B_\rho$ и для $A \in B_\tau$ $\int_A f_\tau\, d\mu \leqslant \int_A f_\rho\, d\mu$. Устанавливается стохастическая сходимость этого процесса при условии $\int_E f_i d\mu < \infty$, где $i \in \theta$ и является первым элементом в θ, изучаются вопросы, связанные со сходимостью в среднем в L_p этого процесса, а также существенная сходимость процесса, т. е. рассматривается вопрос о совпадении верхнего и нижнего алгебраического предела

$$\limsup_\tau f_\tau = \bigwedge_{\rho \in \theta} \bigvee_{\rho \ll \tau} f_\tau \quad \text{и} \quad \liminf_\tau f_\tau = \bigvee_{\rho \in \theta} \bigwedge_{\rho \ll \tau} f_\tau$$

соответственно, где $\wedge$ означает взятие нижней грани, а $\vee$ — верхней. Приведенный в работе пример показывает, что для $\{f_\tau\}$ не всегда имеет место существенная сходимость, а потому с помощью целой шкалы условий, которые налагают при переходе к следующему условию все большие ограничения на B_τ, B и μ, даются условия для существенной сходимости некоторого класса мартингалов и полумартингалов, который увеличивается при переходе к следующему условию в шкале. Б. А. Рогозин

11 В30. О случайных обобщенных процессах. Marinescu Gheorge. Sur les processus stochastiques généralisés. «Trans. 2nd Prague Conf., Liblice, 1959». Prague, 1960, 349—351 (франц.)

Гельфанд определял обобщенный случайный процесс (РЖМат, 1957, 8795), как случайный функционал, принимающий значения из некоторого пространства H, над пространством финитных функций. В статье это определение конкретизируется для случая, когда H конечно. Процесс определяется заданием «начального» распределения вероятностей и переходными вероятностями. Получены дифференциальные уравнения, связывающие эти функции. Р. Ф. Матвеев

11 В31. Замечания по поводу задачи о прогнозе для некоторых классов случайных процессов. Cramér Harald. Remarques sur le problème de prédiction pour certaines classes de processus stochastiques. «Calcul probabilités et applic. Paris», CNRS, 1959, 103—112 (франц.)

В первой части рассматриваются произвольные случайные процессы $\{x_n\}$ с дискретным параметром $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, имеющие нулевое среднее значение и корреляционную функцию $r(m,n) = \mathbf{M} x_m \bar{x}_n < \infty$. Если $H(X)$ — гильбертово пространство (с обычным скалярным произведением $(x,y) = \mathbf{M}(xy)$, натянутое на все x_n, а $H_m(X)$ — подпространство $H(X)$, натянутое на величины x_n с $n \leqslant m$ и, наконец, $H_{-\infty}(X) = \bigcap_m H_m(X)$, то процесс $\{x_n\}$ называется детерминированным, если $H_{-\infty}(X) = H(X)$, и называется независимым от далекого прошлого, если $H_{-\infty}(X) = 0$. Утверждается, что для любого процесса $\{x_n\}$ сущест-

вуют возрастающая последовательность целых чисел $\{j_k\}$ (бесконечная, конечная или пустая) и соответствующая этим j_k последовательность взаимно некоррелированных случайных величин $\{\xi_{jk}\}$ такие, что $x_n = u_n + v_n$, где процесс $\{u_n\}$ представим в виде $u_n = \sum_{j_k \leqslant n} C_{n,j_k}\xi_{j_k}$ с комплексными коэффициентами C_{n,j_k}, удовлетворяющими неравенству $\sum_{j_k \leqslant n} |C_{n,j_k}|^2 < \infty$, а процесс $\{v_n\}$ является детерминированным и некоррелированным с процессом $\{u_n\}$. При этом процесс $\{x_n\}$ будет детерминированным тогда и только тогда, когда процесс $\{u_k\}$ тождественно обращается в нуль (т. е. последовательность $\{j_k\}$ является пустой); в противном случае наилучший прогноз $\widetilde{x}_{n+p,n}$ элемента x_{n+p} процесса $\{x_n\}$, линейно зависящий от величины x_m, $m \leqslant n$, дается формулой

$$\widetilde{x}_{n+p,n} = \sum_{j_k \leqslant n} C_{n+p,j_k}\xi_{j_k} + v_{n+p},$$

а средний квадрат ошибки этого наилучшего прогноза равен $\sum_{n < j_k \leqslant n+p} |C_{n+p,j_k}|^2$. Намечается доказательство сформулированных здесь утверждений, очень близкое к доказательству А. Н. Колмогорова (Бюл. МГУ, 1941, 2, № 6) соответствующей теоремы для стационарных процессов. Во второй части работы рассматриваются гармонизируемые (в смысле М. Лоэва) случайные процессы $\{x_n\}$, т. е. процессы вида $x_n = \int_{-\pi}^{\pi} e^{inu}dzu$, где $F(u, v) = Mz(u)\overline{z(v)}$ является функцией ограниченной вариации. Комплексной мере $dF(u, v)$ на квадрате $-\pi \leqslant u, v < \pi$ с помощью формулы

$$G(u) = \int_{-\pi}^{u}\int_{-\pi}^{\pi} |dF(u, v)|$$

сопоставляется вещественная неотрицательная мера $dG(u)$ на прямой $-\pi \leqslant u < \pi$; с помощью известной теоремы Колмогорова об условиях сингулярности стационарных случайных процессов доказывается, что если

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log G'(u)\,du = -\infty,$$

то процесс $\{x_n\}$ обязательно будет детерминированным. В заключение для случая гармонизируемых процессов с функцией $F(u, v)$, удовлетворяющей некоторым специальным условиям, указывается (без доказательства) условие, позволяющее проверить, будет ли или не будет заданная последовательность $\{j_k\}$ целых чисел j_k для данного процесса именно той последовательностью $\{j_k\}$, о которой шла речь в первой части работы.

А. М. Яглом

11 В32. О фильтрации последовательностей случайных величин. Розенберг Л. А., Скорнева М. И. «Изв. АН СССР. Отд. техн. н. Энерг. и автоматика», 1959, № 3, 55—62

Рассматриваются следующие две задачи, относящиеся к фильтрации стационарных последовательностей:

1. Пусть $\eta(s)$ и $\zeta(s)$ — некоррелированные между собой случайные стационарные последовательности с нулевыми средними значениями и заданными спектральными плотностями $f_{\zeta\zeta}(\lambda) = \frac{\mu}{2\pi}$ и $f_{\eta\eta}(\lambda) = \frac{c(1-a^2)}{2\pi|e^{i\lambda}-a|^2}$ и величина $\eta(n)$ аппроксимируется суммой $y(n) = q\sum_{k=0}^{m}(1-q)^k \times [\eta(n-k) + \zeta(n-k)]$. Подсчитывается средний квадрат ошибки $\sigma^2(m, q) = M(y(n) - \eta(n))^2$ как функция m и q; полученные результаты иллюстрируются графиками. Отмечается; что $\sigma^2(m, q)$ слабо зависит от m и что $\min_q \sigma^2(m, q)$ не всегда достигается на открытом интервале $0 < q < 1$.

2. Пусть $\xi(s) = \eta(s) + \zeta(s)$, где $\eta(s) = \sum_{\mu=0}^{r} a_\mu t^\mu$ — многочлен с неизвестными коэффициентами, а $\zeta(s)$ — стационарная случайная последовательность с нулевым средним значением и заданным спектром $f_{\zeta\zeta}(\lambda)$. Требуется найти линейную комбинацию $y(n-m) = \sum_{k=0}^{n} a_k^{(m)}\xi(n-k)$, дающую несмещенную оценку наименьшей дисперсии величины $\eta(n-m)$. Доказывается, что решение этой задачи сводится к решению определенной линейной системы $n+r+2$ уравнений с $n+r+2$ неизвестными, детерминант которой (при естественных условиях невырожденности) отличен от нуля. Этот довольно очевидный результат покрывается (как указывают и авторы) результатами известной работы Джонсона (РЖМат, 1958, 3165).

А. М. Яглом

11 В33. О наилучшем приближении случайных процессов. Kramer Henry P. On best approximation of random processes et al. «IRE Trans. Inform. Theory», 1960, 6, № 1, 52—53 (англ.)

Теорема Е. Шмидта о наилучшем L_2-приближении функции двух переменных при помощи конечной суммы произведений функций одной переменной на функции другой переменной применяется к случайному процессу. Случайный процесс $x(t)$ для конечного интервала времени I рассматривается как функция двух переменных, времени и точки фазового пространства. Тогда,

$$\int_I E|x(t) - \sum \alpha_\nu \varphi(t)|^2 dt \geqslant \int_I E\Big|x(t) - \sum \frac{\xi_\nu \psi_\nu(t)}{\lambda_\nu}\Big|^2 dt = \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_\nu^2},$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — произвольные числа, $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$ — произвольные случайные функции.

$$\lambda_\nu^2 \int_I r(s, t)\,\overline{\psi_\nu(t)}\,dt = \psi_\nu(s);$$

$$\xi_\nu = \lambda_\nu \int_I x(t)\,\overline{\psi_\nu(t)}\,dt; \quad E(\xi_l \xi_j) = \delta_{lj}$$

и

$$\int_I \psi_k(t)\,\overline{\psi_l(t)}\,dt = \delta_{kl};$$

$r(s, t)$ есть ковариационная функция $x(t)$. Подобный результат имеет место и для случайного вектора $x(w) = (x_1(\omega), \ldots, x_m(\omega))$. Вывод сформулирован следующим образом: для случайного процесса $x(t)$ из всех приближений вида $\sum_1^N \alpha_n \varphi_n(t)$ оптимальным является приближение Леви—Карунена. При этом не обязательно a priori полагать случайные величины $\{\alpha_n\}$ коэффициентами Фурье по отношению к системе функций $\{\varphi_n(t)\}$.

Ю. А. Веретенников

11 В34. Представление многомерных случайных процессов. Kelly Edward J., Root William L. A representation of vector-valued random processes. «J. Math. and Phys.», 1960, 39, № 3, 211—216 (англ.)

Теорема. Пусть $X(t) = (X^{(1)}(t), X^{(2)}(t), \ldots)$ — многомерный случайный процесс, заданный в конечном интервале $[a, b]$, с комплексными компонентами $X^{(i)}(t)$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Предположим, что корреляционная функция

$$R^{(i,j)}(S,t) = MX^i(S)\overline{X^{(j)}(t)}$$

существует, непрерывна и равномерно ограничена в прямоугольнике $[a,b]\times[a,b]$. Предположим, далее, что

$$\sum_{i,j=1}^{\infty}\int_a^b\int_a^b |R^{(i,j)}(S,t)|^2 dS dt < \infty \qquad (1)$$

и что существуют такие действительные постоянные C_j $(j=1,2,\ldots)$, для которых

$$\int_a^b |R^{(i,j)}(S,t)|^2 dt \leqslant C_j^2 \quad (i=1,2,\ldots;\ a\leqslant S\leqslant b)$$

и

$$\sum_{j=1}^{\infty} C_j^2 = C < \infty. \qquad (2)$$

Тогда случайный процесс $x(t)$ $(t\in[a,b])$ допускает представление

$$X^{(i)}(t) = \sum_K X_K \varphi_K^{(i)}(t) \quad (i=1,2,\ldots.), \qquad (3)$$

где

$$X_K = \sum_{i=1}^{\infty}\int_a^b X^{(i)}(t)\,\overline{\varphi_K^{(i)}(t)}\,dt,$$

$\varphi_K^{(i)}$ $(i=1,2,\ldots)$ являются собственными функциями уравнения

$$\sum_{j=1}^{\infty}\int_a^b R^{(i,j)}(t,S)\varphi_K^{(j)}(S)\,dS = \lambda_K\varphi_K^{(i)}(t) \quad (a\leqslant t\leqslant b)$$

и ряд (3) сходится в среднеквадратичном, в смысле вероятностной меры, равномерно по t. Кроме того,

$$MX_K\overline{X_l} = \lambda_K\delta_{Kl},\quad \delta_{Kl} = \sum_{i=1}^{\infty}\int_a^b \varphi_l^{(i)}(t)\overline{\varphi_K^{(i)}(t)}\,dt,\quad \lambda_K\geqslant 0.$$

Для конечномерного случая (1) и (2) выполняются автоматически. Доказанная теорема обосновывает представление многомерных случайных процессов, аналогичное представлению Каргунена — Лоева (Karhunen K., Ann. Acad. Sci. Fennicae Ser. A, I. Math. Phys., 1947, 34; Loève (приложение к монографии), Processus stochastiques et mouvement Brownien, Paris, 1948) для одномерных процессов. Доказательство опирается на обобщенную теорему Мерсера, которая также пригодится в статье. Библ. 3 назв. Н. В. Яровицкий

11 В35. Изотропные случайные поля марковского типа в евклидовом и гильбертовом пространствах. Ядренко М. И. «Тр. Всес. совещания по теории вероятностей и матем. статистике, 1958». Ереван, АН АрмССР, 1960, 263—279

Случайное поле $\xi(P)$ в R^n называется полем марковского типа относительно семейства M замкнутых жордановых поверхностей, если для любой такой поверхности S и любых точек P_1 и P_2, разделяемых этой поверхностью, значения $\xi(P_1)$ и $\xi(P_2)$ при фиксированных значениях $\xi(P)$ на S независимы. Доказывается, что непрерывное гауссовское изотропное поле марковского типа относительно семейства концентрических сфер, имеющее нулевое среднее значение и единичную дисперсию, имеет корреляционную функцию вида

$$B_n(r) = (cr/2)^{-\frac{n-2}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)J_{\frac{n-2}{2}}(cr).$$

Соответствующая этому полю случайная спектральная мера $\tau_i(S)$ на сфере S радиуса c является броуновской мерой. Выборочные функции сепарабельного поля $\xi(P)$ с вероятностью единица дифференцируемы любое число раз и удовлетворяют уравнению Лапласа $\Delta\xi + c^2\xi = 0$. Поле $\xi(P)$ вырождено: для широкого класса поверхностей S его значения внутри S однозначно восстанавливаются по значениям на S. Формулируются аналогичные теоремы для гильбертова пространства. Обсуждаются другие способы определения марковских полей. А. С. Монин

11 В36. Об одном классе векторных изотропных случайных полей. Ядренко М. И. «Укр. матем. ж.», 1960, 12, № 2, 223—225

Рассматриваются случайные гауссовские поля с векторными значениями, определенные в конечномерном или бесконечномерном евклидовом пространстве. Такие поля называются марковскими, если значения поля по разные стороны замкнутых достаточно гладких поверхностей независимы при условии, что известны значения поля на поверхности. Находятся корреляционные матрицы таких полей. А. В. Скороход

11 В37. О спектральных функциях некоторых классов стационарных гауссовских процессов. Ибрагимов И. А. «Докл. АН СССР», 1961, 137, № 5, 1046—1048

Пусть $x(t)$ — стационарный гауссовский процесс, а $\mathfrak{M}_a^b$ — σ-алгебра событий, порожденная значениями $x(t)$ при $t\in[a,b]$. Процесс $x(t)$ обладает свойством сильного перемешивания, если

$$\lim_{\tau\to\infty}\sup_{A\in\mathfrak{M}_{-\infty}^2,\ B\in\mathfrak{M}_{\tau}^{\infty}} |P(AB) - P(A)P(B)| = 0.$$

Основная часть работы посвящена изучению свойств спектральной плотности $f(\lambda)$ для гауссовских процессов с сильным перемешиванием. Формулируются следующие утверждения: 1) $f(\lambda)$ не имеет разрывов первого рода; 2) для всех $\delta>0$ $\lim\limits_{\lambda\to\lambda_0} f(\lambda)|\lambda-\lambda_0|^{\delta} = 0$; 3) если существует предел $\lim\limits_{\lambda\to\lambda_0}\dfrac{\log f(\lambda)}{\log|\lambda-\lambda_0|}$, то этот предел является целым четным числом; 4) для процессов с дискретным временем существует такой многочлен $P(z)$, что

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|P(e^{i\lambda})|^2}{f(\lambda)}\,d\lambda < \infty.$$

А. В. Скороход

11 В38. Стохастическая аппроксимация для непрерывных случайных процессов. Driml Miloslav, Nedoma Jiří. Stochastic approximations for continuous random processes.. «Trans. 2nd Prague Conf., Liblice, 1959». Prague, 1960, 145—158 (англ.)

Изучается возможность определения нулей функции $r(x)$ в том случае, когда она представима в виде

$$r(x) = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t f(\omega,\tau,x)\,d\tau,$$

где $f(\omega,\tau,x)$ — семейство случайных процессов, зависящих от параметра x, предел понижается в смысле сходимости с вероятностью 1. Доказываются теоремы:

Теорема 1. Пусть $f(\omega,\tau,x)$ с вероятностью 1 непрерывно по совокупности переменных и монотонно по x, а $x(\omega,t)$ — решение уравнения

$$\frac{dx(\omega,t)}{dt} = -a(t)f(\omega,t,x(\omega,t));\ a(t) = \begin{cases}1, & t\in[0,1]\\ \dfrac{1}{t}, & t>1,\end{cases} \qquad (1)$$

тогда, если θ — множество нулей $r(x)$, то с вероятностью 1 расстояние между θ и $x(t,\omega)$ стремится к нулю при $t\to\infty$.

Теорема 2. Пусть $f(\omega,\tau,x) = h(\omega,\tau) + r(x)$, где $h(\omega,\tau)$ с вероятностью 1 — непрерывный процесс, а $r(x)$ — непрерывная функция, для которой $r(x)>0$

при $x > \theta$, $r(x) < 0$ при $x < \theta$, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} |r(x)| > 0$, тогда решение (1) $x(t, \omega)$ с вероятностью 1 сходится к θ.
А. В. Скороход

11 В39 К. Экспоненциально распределенные случайные числа. Clark Charles Erwin, Holz Betty Weber. Exponentially distributed random numbers. Baltimore Md, John's Hopkins Press; London, Oxford Univ. Press, 1961, viii, 249 pp., ill., 52 sh. «Brit. Nat. Bibliogr.», 1961, № 583, 10 (англ.)

11 В40 Д. Взаимно заменяемые случайные величины и предельные теоремы для них. Bühlmann Hans. Austauschbare stochastische Variabeln und ihre Grenzwertsätze. Diss., Dokt. Math., Eidgenöss. techn. Hochschule Zürich. Berkeley—Los Angeles, Univ. Press, 1960, 37 S., ill. (нем.)

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Редактор *Н. В. Смирнов*

11 В41. Статистические термины. Lisman J. H. C. Statistische termen. «Statist. neerl.», 1961, **15**, № 1, 31—33 (гол.)

11 В42. Леди, пробующая чай, и связанные с этим вопросы. Gridgeman N. T. The lady tasting tea, and allied topics. «J. Amer. Statist. Assoc.», 1959, **54**, № 288, 776—783 (англ.)

Обсуждение принципиальных основ математической статистики.
Р. Л. Добрушин

11 В43. Последние тенденции в обосновании статистики. Savage L. J. Recent tendencies in the foundations of statistics. «Proc. Internat. Congr. Mathematicians, 1958.» Cambridge, Univ. Press, 1960, 540—544 (англ.)

Беглые замечания в историческом разрезе. Обсуждается применимость теории решающих функций и так называемой субъективной теории вероятностей.
Р. Л. Добрушин

11 В44. Аффинный характер графического изображения системы двух случайных величин. Gennart Paul-E. La caractère affin de la représentation graphique des variables aléatoires à deux dimensions. «Bull. Assoc. ingrs issus Ecole applic. artill. ef génie», 1960, **38**, № 4, 31—36 (франц., рез. флам.)

В графическом изображении распределения системы двух случайных величин различают метрические свойства и аффинные свойства графика. Путем надлежащего выбора системы координат можно ассоциировать метрические свойства изображения со свойствами случайной величины.

11 В45. О медиане распределения выходов за границу. Sarkadi K., On the median of the distribution of exceedances. «Ann. Math. Statistics», 1960, **31**, № 1, 225—226 (англ.)

Рассматривается распределение «выходов за границу», определяемое формулой

$$w(n_1, m_2 n_2, x) = \frac{\binom{n_1 + n_2 - m - x}{n_1 - m}\binom{x + m - 1}{m - 1}}{\binom{n_1 + n_2}{n_1}}, \quad (1)$$

$$x = 0, 1, \ldots, n_2;\ n_1, n_2, m \leqslant n.$$

Две основные модели этого распределения: А. Имеются две выборки (их размеры — n_1 и n_2) из некоторого непрерывного распределения. Число «выходов за границу» определяется как число элементов второй выборки, превышающих по крайней мере $n_1 - m + 1$ элемент первой. Распределение этого числа определяется формулой (1). В. Урна содержит n_1 черных и n_2 красных шаров. Вынимаем шары без возвращения до тех пор, пока не вынем m черных. Распределение числа красных шаров при этом определяется также формулой (1). В статье доказано, что $W(n_1, m_1, n_2, m_2 - 1) + W(n_2, m_2, n_1, m_1 - 1) = 1$, где $W(n_1, m, n_2, x) = \sum\limits_{y=0}^{x} w(n_1, m, n_2, y)$. Отсюда следует известный ранее результат, что медиана рассматриваемого распределения при $n_1 = n_2$ равна $m - 1$.
Ю. А. Веретенников

11 В46. О геометрическом смысле моментов порядковых статистик и уклонений порядковых статистик от среднего в выборках из гауссовых совокупностей. Ruben Harold. On the geometrical significance of the moments of order statistics and of deviations of order statistics from the mean in samples from Gaussian populations. «J. Math. and Mech.», 1960, **9**, № 4, 631—638 (англ.)

Выводятся формулы для моментов членов вариационного ряда $\xi_{1/n}, \xi_{2/n}, \ldots, \xi_{n/n}$ из n наблюдений и для моментов разностей $\xi_{r/n} - \sum\limits_{k} \xi_{k/n}/n$ $(1 \leqslant r \leqslant n)$. Результаты записываются в виде интегралов по участку поверхности $(n-1)$-мерной сферы, ограниченному $n-1$ гиперплоскостями.
А. А. Боровков

11 В47. Преобразования для нахождения вероятностей и значений случайных величин для функций распределения по таблицам схожих функций распределения. Prins H. J. Transforms for finding probabilities and variate values of a distribution function in tables of a related distribution function. «Statist. neerl.», 1960, **14**, № 1, 1—17 (англ.; рез. гол.)

Рассматриваются распределения следующих двух типов:

I. Нормальное распределение, распределение χ^2, Γ-распределение, распределение Пуассона.

II. r-распределение выборочного коэффициента корреляции в выборах из нормальной совокупности при $\rho = 0$: t — распределение Стьюдента, F — распределение, G — распределение при $\rho = 0$ отношения $\frac{m\Gamma_n}{n\Gamma_m}$, где Γ_n и Γ_m имеют Γ-распределение с соответствующими степенями свободы, B — распределение, биномиальное распределение, распределение Паскаля. Указываются связи, существующие между распределениями, принадлежащими к одному и тому же типу, и позволяющие разыскивать значения одних функций распределения по таблицам, составленным для других функций того же типа.
Б. Н. Гарттштейн

11 В48. Применение понятия количества информации в планировании и сравнении регрессионных экспериментов. Stone M. Application of a measure of information to the design and comparison of regression experiments. «Ann. Math. Statistics», 1959, **30**, № 1, 55—70 (англ.)

Рассматриваются эксперименты $\varepsilon(X, C)$, состоящие в наблюдении случайных векторов вида

$$\eta = X\theta + \xi,$$

где: X — данная матрица размера $n \times k$; θ — k-мерный вектор, параметр; ξ — n-мерный случайный вектор, распределенный нормально со средним 0 и матрицей ковариаций C ($|C| \neq 0$). Положим $F = X' C^{-1} X$. Мерой количества информации для эксперимента $\varepsilon(X, C)$ является величина $\Delta I(A) = \frac{1}{2} \log |E + AF|$ (равная количеству информации в η относительно θ), если априори предполагается, что параметр θ имеет нормальное распределение со средним μ и матрицей ковариаций A ($|A| > 0$). Матрица F при этом не предполагается необходимой. Указывается ряд преимуществ рассматриваемой информационной меры сравнительно с оценкой Элфвинга, использующего след матрицы F^{-1} (Elfving G., Ann. Math. Statistics, 1952, 23, 255—262). Доказывается, что теорема Элфвинга об оптимальном числе наблюдений справедлива и при информационной оценке плана эксперимента. Обсуждается пример, когда информационная оценка приводит к «наилучшему»

распределению, отличному от получаемого Элфвингом. Рассматривается вопрос о сравнении экспериментов. Устанавливается, что положительная полуопределенность матрицы $F_1 - F_2$ является необходимым и достаточным условием выполнения соотношения $\Delta I_1(A) \geqslant \Delta I_2(A)$ для всех положительно определенных матриц A (F_i и $\Delta I_i(A)$ — соответственно матрица F и количество информации для $\varepsilon(X_i, C_i)$, $i = 1, 2$). Рассматривается асимптотическое поведение информационной меры при $n \to \infty$, выясняется связь с теорией Неймана—Пирсона. В случае присутствия дополнительных параметров, линейно входящих в выражения для математических ожиданий случайных векторов η, подобно параметру θ, устанавливается результат, аналогичный полученному Черновым. Л. Я. Савельев

11 В49. Заметки о статистических приложениях теории информации. IV. Sakaguchi Minoru Notes on statistical applications of information theory. IV. «Repts Statist. Applic. Res., Union Japan. Scientists and Engrs», 1959, **6**, № 2, 54—57 (англ.)

Ч. II и III см. РЖМат, 1961, 8В58, 9В87. Рассматривается связь между шенноновской пропускной способностью эксперимента, рассматриваемого как система связи с шумом, и информационными числами Каллбека — Лейблера. Доказывается теорема: Если существует линейная комбинация $\sum_1^n \xi_i^* f_i(x)$ плотностей $f_i (i = 1, \ldots, n)$ с коэффициентами $\xi_i^* > 0$, $\sum_1^n \xi_i^* = 1$ такая, что

$$I\left(f_i; \sum_1^n \xi_i^* f_i\right) = \int f_i(x) \log \frac{f_i(x)}{\sum_1^n \xi_i^* f_i(x)}\, dx$$

не зависит от i, то распределение ξ^* максимизирует количество информации

$$T(\xi, \{f_i\}) = \sum_{i=1}^n \xi_i \int f_i(x) \log \frac{f_i(x)}{\sum_1^n \xi_i f_i(x)}\, dx \left(\xi_i \geqslant 0, \sum_1^n \xi_i = 1\right).$$

Приводится несколько примеров вычисления пропускной способности $\max_\xi T(\xi, \{f_i\})$ для различных конечных экспериментов. Плотности f_i понимаются в общем смысле: соответствующие им вероятностные меры абсолютно непрерывны друг относительно друга. Пусть $f(x \mid \theta) = \beta(\theta) e^{\theta x} r(x)$, $r(x) \geqslant 0$ и $\beta(\theta)$ определяется условием $\int f(x \mid \theta)\, dx = 1$. Если для двух плотностей $f(x \mid \theta_1)$ и $f(x \mid \theta_2)$ с общим $r(x)$ существует $\xi^* > 0$ такое, что

$$I(f(x \mid \theta_1); f(x \mid \theta)) = I(f(x \mid \theta_2); f(x \mid \theta)),$$

где $\theta = \xi^* \theta_1 + (1 - \xi^*)\theta_2$, то общее значение указанных информационных количеств называется «псевдопропускной способностью» дихотомического эксперимента с плотностями $f(x \mid \theta_1)$ и $f(x \mid \theta_2)$. Доказывается теорема: Для экспоненциального семейства плотностей $\{f(x \mid \theta)\}$ псевдопропускная способность определяется формулой

$$C' = \omega(a) - \omega(\theta_1) - (a - \theta_1)\omega'(\theta_1),$$

где

$$\omega(\theta) = -\log \beta(\theta), \quad a = [(\theta_1 \omega'(\theta_1) - \theta_2 \omega'(\theta_2)) - (\omega(\theta_1) - \omega(\theta_2))]/[\omega'(\theta_1) - \omega'(\theta_2)].$$

Имеем также

$$\lim_{\theta_1, \theta_2 \to \theta} C'(\theta_1 - \theta_2)^{-2} = \frac{1}{8}\omega''(\theta).$$

Приводится таблица значений псевдопропускной способности для биномиальных, пуассоновых и нормальных распределений. В биномиальном случае псевдопропускная способность совпадает с пропускной способностью. Л. Я. Савельев

11 В50. Локально асимптотически нормальные семейства распределений. Некоторые приближения к семействам распределений и их использование в теории оценивания и проверки гипотез. LeCam Lucien. Locally asymptotically normal families of distributions Certain approximations to families of distributions and their use in the theory of estimation and testing hypotheses. «Univ. Calif. Publs Statist.», 1960, **3**, № 2, 37—98 (англ.)

Пусть на последовательности $\{\mathfrak{A}_n\}$ σ-алгебр подмножеств пространства $\mathfrak{X}$ задано семейство последовательностей мер $\{P_{n,\theta};\ \theta \in \Theta\}$, Θ — подмножество k-мерного евклидова пространства. Положим $\Lambda[P; Q] = \log \frac{p}{q}$ там, где этот логарифм имеет смысл; p и q — производные Радона — Никодима мер P и Q относительно меры, по которой они абсолютно непрерывны. Пусть для любой последовательности $\{\gamma_n\}$ такой, что $\sqrt{n}\,\gamma_n$ ограничено,

$$\Lambda[P_{n,\theta_0+\gamma_n}; P_{n,\theta_0}] - \sqrt{n}\,\gamma_n \Delta_n(\theta_0) + A(\sqrt{n}\,\gamma_n)$$

стремится к нулю по $P_{n,\theta}$-мере; распределение $\mathfrak{A}_n$-измеримой k-мерной случайной величины Δ_n сходится к предельному; функция A непрерывна; последовательности мер $P_{n,\gamma_n+\theta_0}$ и P_{n,θ_0} «сближаются». Тогда $\{\Delta_n\}$ играет роль дифференциально асимптотически достаточной в точке θ_0 статистики; именно существует семейство распределений $\{Q_{n,\theta}\}$ такое, что для любой $C > 0$

$$\sup_{\theta:\sqrt{n}\,|\theta-\theta_0|<C} \| P_{n,\theta} - Q_{n,\theta} \| \to 0$$

и $\{\Delta_n\}$ является достаточной уже в обычном смысле статистикой для $\{Q_{n,\theta}\}$. В теореме 4.1 доказывается, что при определенных условиях распределение $\{\Delta_n(\theta_0)\}$ сходится к некоторому нормальному распределению. Имеются применения полученных результатов указанного выше типа к задачам оценивания (теоремы 3.2, 5.1), проверке гипотез (предложение 7.1) и построению асимптотически подобных критериев. А. М. Каган

11 В51. Допустимость оценки Питмена для одного параметра. Stein Charles. The admissibility of Pitman's estimator of a single location parameter. «Ann. Math. Statistics», 1959, **30**, № 4, 970—979 (англ.)

Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — случайные величины, независимые и одинаково распределенные с плотностью $r(x - \xi)$, где ξ — неизвестный параметр. Рассмотрим оценку:

$$\hat{\xi}_0(X_1, \ldots, X_n) = \frac{\int \xi \prod_1^n r(X_i - \xi)\, d\xi}{\int \prod_1^n r(X_i - \xi)\, d\xi}.$$

Указывается, что оценка $\hat{\xi}_0$ является допустимой (т. е. для любой оценки $\hat{\xi}$ выполнение неравенства

$$E_\xi (\hat{\xi} - \xi)^2 < E_\xi (\hat{\xi}_0 - \xi)^2$$

для всех ξ влечет выполнение равенства для всех ξ), если

$$\int \prod_1^n r(x_l)\left\{\frac{\int \xi^2 \prod_1^n r(x_l-\xi)\,d\xi}{\int \prod_1^n r(x_l-\xi)\,d\xi}-\left(\frac{\int \xi \prod_1^n r(x_l-\xi)\,d\xi}{\int \prod_1^n r(x_l-\xi)\,d\xi}\right)^2\right\}^{3/2}\prod_1^n dx_l<\infty .$$

Получены также следующие, более общие результаты. Пусть $\mathfrak{B}$ — σ-алгебра всех борелевских множеств на числовой прямой R, $\mathfrak{G}$ — σ-алгебра подмножеств множества S; μ — мера Лебега на $\mathfrak{B}$, ν — вероятностная мера на $\mathfrak{G}$. Пусть p — неотрицательная измеримая $(\mathfrak{B}\times\mathfrak{G})$ функция на $R\times S$ такая, что $\int p(x,y)\,d\mu(x)=1$, $\int xp(x,y)\,d\mu(x)=0$ для всех y;

$$\int d\nu(y)\left(\int x^2 p(x,y)\,d\mu(x)\right)^{3/2}<\infty .$$

Теорема 1. Если при сделанных предположениях (X,Y) распределена так, что при любом значении параметра ξ $(X-\xi,Y)$ имеет плотность распределения p относительно $\mu\times\nu$, то X является допустимой оценкой ξ для квадратичной функции потерь.

Теорема 2. Если при сделанных предположениях (X,Y) распределена так, что для некоторого неизвестного параметра ξ Y имеет распределение ν и функция условного распределения $X-\xi$ при данном Y есть $P(\cdot,Y)$, то X является почти допустимой оценкой ξ для квадратичной функции потерь. Т. е. если φ — измеримая $(\mathfrak{B}\times\mathfrak{G})$ функция на $R\times S$ такая, что

$$\int d\nu(y)\int[\varphi(x,y)-\xi]^2 d_x P(x-\xi,y)\leqslant$$
$$\leqslant\int d\nu(y)\int(x-\xi)^2 d_x P(x-\xi,y)$$

для всех ξ, то для почти всех ξ выполняется равенство.

Л. Я. Савельев

11 В52. Замечание о теории несмещенных оценок. Schmetterer L. Bemerkungen zur Theorie der erwartungstreuen Schätzfunktionen. «Mitteilungsbl. math. Statist.», 1957, 9, № 2, 147—152 (нем.)

Рассматривается класс K функций распределения $F(x)$ и функционал $g(F)$, определенный на K. Функция $h(x)$ является несмещенной оценкой $g(F)$, если для любой $F\in K$

$$E[h(x)\mid F]=\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\,dF=g(F).$$

Леманн и Шеффе доказали, что если дисперсия $\Delta=E[(h(x)-g(F))^2\mid F]$ существует, то существует $h(x)$, для которой Δ достигает минимума. Автор доказывает этот факт, исходя из теории строго выпуклых банаховых пространств. Доказывается следующая теорема: $h(x)$ является несмещенной оценкой для $g(F)$ и минимизирует для некоторого значения p выражение $E[(h(x)-g(F))^p]$, если

$$E[\,|h(x)-g(F)|^{p/q}\operatorname{sign}((h(x)-g(F))v(x))]=0,$$

где $p^{-1}+q^{-1}=1$, $q>0$, а $v(x)$ — любая функция, для которой

$$E[v(x)\mid F]=0,\ F\in K,\ E[\,|v(x)|^p\mid F].$$

O. Onicescu

Перевод из Math. Revs, 1959, 20, № 2,1387.

11 В53. О некоторых свойствах сходимости U-статистик. Sen Pranab Kumar. On some convergence properties of U-statistics. «Calcutta Statist. Assoc. Bull.», 1960, 10, № 37-38, 1—18 (англ.)

Пусть $X_1,\ldots,X_n$ — независимые наблюдения случайной величины с функцией распределения, зависящей от параметра θ и $f(X_1,\ldots,X_m)$, $(m\leqslant n)$ — симметрическая несмещенная оценка функции $g(\theta)$. U-статистика определяется как

$$\binom{n}{m}^{-1}\sum_C f(X_{\alpha_1},\ldots,X_{\alpha_m}),$$

где суммирование C происходит по $1\leqslant\alpha_1<\ldots<\alpha_m\leqslant n$. Основное утверждение (теорема 3), доказываемое в работе, состоит в следующем усилении свойства состоятельности U-статистик.

Теорема. Если $f(X_1,\ldots,X_m)$ при некотором $\delta>1-\frac{1}{m}$ удовлетворяет условию

$$M\{|f(X_1,\ldots,X_m)|^{1+\delta}\}<\infty,$$

то соответствующая U-статистика сходится к $g(\theta)$ с вероятностью 1.

Аналогичная теорема доказана для случая, когда по выборке оценивается несколько параметров.

Примечание референта. В работе имеются нечеткие формулировки.

А. А. Боровков

11 В54. Несмещенные оценки. Функции параметров сдвига и масштаба. Tate R. F. Unbiased estimation. Functions of location and scale parameters. «Ann. Math. Statistics», 1959, 30, № 2, 341—366 (англ.)

Изучаются несмещенные оценки с минимальной дисперсией для функций параметров сдвига и масштаба. Плотность распределения наблюдаемой случайной величины с неизвестным масштабным параметром ρ имеет вид: $f_\rho(x)=\rho f(\rho x)$. Пусть $H(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ — статистика, зависящая от n наблюдений $x_1,x_2,\ldots,x_n$ является однородной функцией от ρ степени $\alpha\neq 0$ с плотностью распределения $g(x)$ при $\rho=1$. Тогда проблема построения несмещенной оценки $\Phi(H)$ для функции $\xi(\rho)$ приводит к интегральному уравнению

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(x)\,\rho^\alpha\,g(\rho^\alpha x)\,dx=\xi(\rho).$$

Это уравнение может быть решено при помощи преобразования Меллина при некоторых предположениях относительно $\xi(\rho)$ и $H(x)$. В случае неизвестного параметра сдвига θ плотность распределения имеет вид: $f_\theta(x)=f(x-\theta)$, или

$$f_\theta(x)=\frac{f(x-\theta)}{\int_0^b f(t-\theta)dt}\quad(-\infty<\theta<x<b).$$

В этом случае построение оценки $\Phi(U)$ для функции $\xi(\theta)$ при помощи статистики $U(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, обладающей свойством:

$$U(x_1+c,\ x_2+c,\ldots,x_n+c)=U(x_1,x_2,\ldots,x_n)+c$$

для любого действительного c, приводит к интегральному уравнению $\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(x)\,g(x-\theta)\,dx=\xi(\theta)$, где $g(x-\theta)$ — плотность распределения статистики U. Это уравнение может быть решено при помощи преобразования Лапласа (разумеется, когда это возможно). Рассмотрен также случай, когда плотность распределения наблюдаемой случайной величины зависит от параметра

усечения типа I: $f_\theta(x) = k_1(\theta)\, h_1(x)$ $(a < \theta < x < b)$ или типа II: $f_\theta(x) = k_2(\theta)\, h_2(x)$ $(a < x < \theta < b)$. В этом случае достаточной статистикой служат соответственно минимальный или максимальный члены вариационного ряда, с помощью которых строятся несмещенные оценки для абсолютно непрерывных функций $\xi(\theta)$. Рассмотрены конкретные примеры для плотностей распределения экспоненциального типа. В. С. Королюк

11 В55. Непараметрические свойства некоторых оценок максимального правдоподобия для медианы симметричной совокупности. Walsh John E. Nonparametric properties of some maximum likelihood estimates for median of symmetrical population. «Ann. Inst. Statist. Math.», 1959, 11, № 2, 81—88 (англ.)

Пусть $x(1) < x(2) < \ldots < x(n)$ — порядковые статистики выборки объема n из симметричной совокупности с медианой Ф. Если совокупность имеет заданную параметрическую форму, а ее плотность обладает некоторыми подходящими свойствами, то существуют единственные оценки максимального правдоподобия для Ф, основанные на определенных множествах порядковых статистик. Если таким подмножеством является совокупность пар вида $x(i)$ и $x(n+1-i)$ (а также $x((n+1)/2)$, если n нечетно), то оценка максимального правдоподобия во многих случаях обладает некоторыми непараметрическими свойствами. Например, в рассматриваемом случае эта оценка распределена симметрично относительно Ф. Таким образом можно построить медианные оценки для Ф в достаточно широком классе симметричных распределений, являющиеся оценками максимального правдоподобия для некоторых параметрических совокупностей, представляющих особый интерес. Если эти оценки имеют 1-й момент, то они будут несмещенными. Изучаемые подмножества порядковых статистик включают, в частности, полную и симметрично цензурированную выборки. По резюме автора

11 В56. Доверительное распределение и теорема Байеса. Lindley D. V. Fiducial distributions and Bayes' theorem. «J. Roy. Statist. Soc.», 1958, B20, № 1, 102—107 (англ.)

Пусть $F(x \mid \vartheta)$ — одномерный закон распределения, зависящий от одномерного параметра ϑ. В статье исследуется вопрос о необходимых и достаточных условиях, при которых доверительное распределение ϑ, определяемое по Р. Фишеру плотностью $-\dfrac{\partial F(x \mid \theta)}{\partial v}$, совпадает с апостериорным распределением ϑ по Байесу. Эти условия при соблюдении естественных требований монотонности и дифференцируемости состоят в существовании представления $F = G(R(x) - P(\vartheta))$. Этот результат далее используется для изучения некоторых свойств достаточных статистик. Получаемые при этом результаты частично пересекаются с результатами, полученными ранее Е. Б. Дынкиным (Успехи матем. наук, 1951, 6, № 1). А. А. Зингер

11 В57. Об одном свойстве достаточных статистик. Дивеев Р. Х. «ЎзССР Фанлар Акад. докладлари, Докл. АН УзССР», 1959, № 2, 7—10 (рез. узб.)

Устанавливается свойство достаточных статистик, состоящее в том, что использование достаточных статистик не уменьшает количество информации в смысле Шеннона относительно параметра, содержащейся в результатах испытаний. А. А. Зингер

11 В58. Один принцип двойственности в математической статистике. Sarkadi K. A rule of dualism in mathematical statistics. «Acta math. Acad. scient. hung.», 1960, 11, № 1-2, 83—92 (англ., рез. русск.)

Находятся формулы, связывающие вероятности

$$P\{\zeta < p \mid X_n = k\} \text{ и } P\{X_{n+1} = k+1 \mid \zeta = p\},$$

где ζ — доля бракованных в партии, X_n — число бракованных в выборке объема n. Рассматривается случай, когда ζ имеет априорное равномерное распределение или бета-распределение. А. В. Скороход

11 В59. Об оценках вероятностей. Большев Л. Н. «Теория вероятностей и ее применения», 1960, 5, № 4, 453—457

Рассматривается задача оценки неизвестной вероятности положительного исхода в последовательности независимых испытаний. Автор рассматривает последовательную процедуру оценки, которую наглядно можно изобразить схемой случайного блуждания по целочисленной решетке: если в какой-то момент времени блуждающая частица находилась в точке (x, y), то в следующий момент она с вероятностью p будет в точке $(x+1, y)$, а с вероятностью $1-p$ — в точке $(x, y+1)$; исходным пунктом блуждания является начало координат, а конечным — точки некоторой границы G, обладающей определенными свойствами регулярности. Автор рассматривает такие оценки вероятности p, которые зависят лишь от координат той точки границы, в которой заканчивается блуждание, и показывает, в частности, что доверительные пределы в этом случае представляют собой квантили B-распределения. Частным случаем такой схемы являются испытания Бернулли (с границей $G = \{(x, y): x + y = n\}$). В качестве другого примера рассмотрена схема Пойа. Согласно этой схеме испытания продолжаются до тех пор, пока наступит ровно m положительных исходов, а оценка

$$p^* = \frac{m-1}{m+y-1},$$

где y — соответствующее число отрицательных исходов, является достаточной оценкой и имеет наименьшую дисперсию, а коэффициент изменчивости (отношение среднего квадратичного отклонения к среднему значению) при $p \to 0$ стремится к $(m-2)^{-1/2}$. Исследуется также асимптотика квантилей B-распределения.

Ю. А. Розанов

11 В60. Новые таблицы двусторонних несмещенных критериев для дисперсий. Chartier F. De nouvelles tables permettant des tests sur variances bilatéraux et sans distorsion. «Rev. statist appl.», 1960, 8, № 1, 61—75 (франц.)

Пусть x_{1j} и x_{2j} — независимые наблюдения случайных величин, имеющих нормальное распределение с дисперсиями σ_1^2 и σ_2^2. Статистики

$$s_1^2 = \frac{1}{\nu_1}\sum (x_{1j} - x_1)^2, \quad \nu_1 = n_1 - 1,$$

$$s_2^2 = \frac{1}{\nu_2}\sum (x_{2j} - \bar{x}_2)^2, \quad \nu_2 = n_2 - 1,$$

являются несмещенными оценками σ_1^2 и σ_2^2. Относительно дисперсий делаются следующие гипотезы: 1) для одной случайной величины x_1 $H_0(\sigma_1 = \sigma)$ и $H_1(\sigma_1 \neq \sigma)$, 2) для двух случайных величин x_1 и x_2 $H_0(\sigma_1 = \sigma_2)$ и $H_1(\sigma_1 \neq \sigma_2)$. Указанные два типа гипотез проверяются по классическим критериям χ^2 и F на основе статистик

$$\chi^2 = \frac{\nu_1 s_1^2}{\sigma_1^2} \quad \text{и} \quad F = \frac{s_1^2/\sigma_1^2}{s_2^2/\sigma_2^2}.$$

Автор предлагает использовать статистики $h\chi$ и kF. Значения h и k можно определить для заданных ν_1, ν_2 и уровней значимости так, что критерии станут несмещенными. Приведена таблица новых критериев и таблица сравнения мощности критерия F и нового критерия. П. А. Строганов

11 В61. Критерии для гипотезы, что распределение долговечности экспоненциально. I. Epstein Benjamin. Tests for the validity of the assumption that the underlying distribution of life in exponential. Part I. «Technometrics», 1960, 2, № 1, 83—101 (англ.)

Описывается 12 методов для проверки гипотезы о том, что распределение времен жизни некоторых объектов является показательным. Обсуждаются сравнительные преимущества и недостатки этих критериев и даются многочисленные ссылки на более ранние статьи.

A. Rényi

11 В62. Оценка максимального правдоподобия для стандартного отклонения нормальной случайной величины, когда выборка сгруппирована. Kulldorff Gunnar. Maximum likelihood estimation of the standard deviation of a normal random variable when the sample is grouped. «Skand. aktuarietidskr.», 1958(1959), № 1-2, 18—36 (англ.)

Стандартное отклонение σ нормальной совокупности с известным средним оценивается по методу максимального правдоподобия на основе группированной выборки. Как говорится в резюме автора, он а) дает необходимое и достаточное условие для существования и единственности решения уравнения правдоподобия относительно σ, б) показывает, что решение, если оно существует, дает абсолютный максимум функции правдоподобия, в) указывает итеративную процедуру для нахождения решения уравнения правдоподобия, г) показывает, что если решение существует, то оно представляет состоятельную и асимптотически эффективную в строгом смысле оценку для σ, и выводит формулу для асимптотической дисперсии этой оценки, д) обсуждает вопрос, как группировать выборки, и, в частности, находит асимптотически оптимальные пределы группирования. Hsu Pao-Lu

11 В63. О моментах выборочных квантилей. Sen Pranab Kumar. On the moments of the sample quantiles. «Calcutta Statist. Assoc. Bull.», 1959, 9, № 33—34, 1—19 (англ.)

В статье показывается, что существование моментов выборочных квантилей и их сходимость к моментам предельного нормального распределения имеет место при более слабых условиях, чем известные в литературе. А именно для того, чтобы это было верно для всех моментов квантилей, достаточно существование момента δ-го порядка первоначальной совокупности при некотором $\delta>0$ и некоторые слабые требования регулярности плотности этой совокупности. Из резюме автора

11 В64. Оценка параметров видоизмененного распределения Пуассона. Cohen A. Clifford, Jr. Estimating the parameters of a modied Poisson distribution. «J. Amer. Statist. Assoc.», 1960, 55, № 289, 139—143 (англ.)

Рассматривается распределение вероятностей

$$p(x;\lambda,\theta)=\begin{cases} e^{-\lambda}(1+\theta\lambda), & x=0,\\ (1-\theta)\lambda e^{-\lambda}, & x=1,\\ e^{-\lambda}\lambda^x/x!, & x=2,3,\ldots, \end{cases}$$

где $\lambda>0$ и $0\leqslant\theta\leqslant 1$. Можно считать, что случайная величина, задающая число наступлений некоторого события, распределена по закону Пуассона, однако некоторые из тех наблюдений, в которых событие наступило один раз, ошибочно отнесены к тем наблюдениям, когда событие не наступило ни разу. С помощью метода максимального правдоподобия найдены оценки:

$$\hat{\lambda}=\left\{\left[\bar{x}-1+\frac{n_0}{N}\right]+\sqrt{\left[\bar{x}-1+\frac{n_0}{N}\right]^2+4\left(\bar{x}-\frac{n_1}{N}\right)}\right\}/2,$$

$$\hat{\theta}=\left(n_0-\frac{n_1}{\hat{\lambda}}\right)/(n_0+n_1),$$

для параметров λ и θ, где n_0—число наблюдений, в которых событие наступило 0 раз, n_1—число наблюдений, в которых событие наступило один раз, N—общее число наблюдений, $\bar{x}$—выборочное среднее. Найдены асимптотическая дисперсия и ковариация для $\hat{\lambda}$ и $\hat{\theta}$.

Ю. А. Веретенников

11 В65. Статистическая задача сортировки. Robbins Herbert. A statistical screening problem. «Contribs Probability and Statist». Stanford, Calif., Univ. Press, 1960, 352—357 (англ.)

Y и θ—независимые случайные величины, распределенные по нормальным законам с известными параметрами. Наблюдаем $X=Y+\theta$ и принимаем или бракуем изделие с характеристикой θ, если соответственно $X>a$ и $X\leqslant a$. Выигрыш от приемки равен θ, выигрыш от браковки—нулю. Решается задача о подборе a, максимизирующем средний выигрыш. Рассмотрена также задача о наилучшем оценивании θ по наблюдениям X.

А. М. Каган

11 В66. Двухэтапные эксперименты для оценки общего среднего. Richter Donald. Two-stage experiments for estimating a common mean. «Ann. Math. Statistics», 1960, 31, № 4, 1164—1173 (англ.)

Рассматриваются две нормальные совокупности с общим средним μ и дисперсиями σ_1^2 и σ_2^2, где значения параметров неизвестны. Задача состоит в оценке μ по фиксированному числу n наблюдений. Экспериментальная процедура содержит два этапа. Сначала оцениваются дисперсии по m наблюдениям из каждой совокупности, а на втором этапе—μ по $n-2m$ наблюдениям из совокупности с меньшей выборочной дисперсией. Пусть $\hat{\mu}$—оценка μ,

$$\theta=\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2},\quad R_n(\theta,m)=n\left[\min\left(\sigma_1^2,\sigma_2^2\right)\right]^{-1}.$$

$E(\hat{\mu}-\mu)^2$ риск оценки $\hat{\mu}$. Автор показывает, что для наилучших в определенном смысле оценок μ при $n\to\infty$ 1) $\sup_\theta R_n(\theta,m)\to 1$, если и только если $\frac{m}{n}\to 0$ и $m\to\infty$, когда $n\to\infty$; 2) $\min_m \sup_\theta R_n(\theta,m)\sim 1+c\cdot n^{-\frac{1}{3}}$ 3) минимаксное значение объема выборки m равно $m\sim c\cdot n^{\frac{2}{3}}$ $(n\to\infty)$.

Ю. И. Медведев

11 В67. Доверительные интервалы для математических ожиданий пауссоновой величины. Crow Edwin L., Gardner Robert S. Confidence intervals for the expectation of a Poisson variable. «Biometrika», 1959, 46, № 3-4, 441—453 (англ.)

Приводится таблица двусторонних доверительных интервалов с коэффициентами доверия соответственно 0,80; 0,90; 0,95; 0,99 и 0,999 в диапазоне значений пуассоновой величины от 0 до 300. Доверительная полоса удовлетворяет следующим оптимальным свойствам: 1) Для любого значения m параметра распределения Пуассона разность c_2-c_1 является минимальной, где c_1 и c_2 обозначают соответственно наименьшее и наибольшее значение наблюдаемой величины, при котором m попадает в доверительный интервал. 2) Из всех таких доверительных полос берется полоса с наименьшим

верхним доверительным пределом. Это означает, что протабулированная система интервалов является того же типа, что и система Кроу (РЖМат, 1958, 6988) для параметра биномиального распределения. Авторы не предлагают использовать свою таблицу для определения односторонних доверительных пределов, поскольку распределение оставшейся вероятностной массы, попадающей на концы распределения, произвольно.

K. Sarkadi

11 В68. Квадратическая погрешность оценки плотностей нормального распределения по данным выборки. Мания Г. М. «Гамотвлиты центрис шромеби. Медниереба Академиа Сакартвелос ССР, Тр. Вычисл. центра. АН ГрузССР», 1960, **1**, 75—96

Пусть $f(x)$—плотность нормального распределения с математическим ожиданием a и дисперсией σ^2; пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$—выборка из генеральной совокупности с плотностью $f(x)$, а $\bar{x}$ и s^2—выборочное среднее и выборочная дисперсия;

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2s^2}}.$$

Показано, что

$$E\tilde{f}(x) = f(x)\left\{1 + \frac{1}{12n}\left[3\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^4 - 18\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2 + 32\right]\right\} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$D\tilde{f}(x) = \frac{f^2(x)}{16n}\left[24\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^4 - 24\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2 + 11\right] + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Изучено предельное распределение величины

$$\psi(\bar{x}, s) = \int_{-\infty}^{\infty} [f(x) - \tilde{f}(x)]^2 dx.$$

Доказывается, что

$$\lim_{n\to\infty} P\{n\psi(\bar{x}, s) < t\} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[1 - \exp\left(-\frac{8\sqrt{\pi}t}{3 + \sin^2\varphi}\right)\right] d\varphi.$$

Это предельное распределение затабулировано.

В. В. Петров

11 В69. О точной дисперсии произведений. Goodman Leo A. On the exact variance of products. «J. Amer. Statist. Assoc.», 1960, **55**, № 292, 708—713 (англ.)

Приводится формула для дисперсии произведения двух случайных величин. Известная в литературе приближенная формула для дисперсии сравнивается с точной; при этом показывается, что приближенная формула дает меньшее значение дисперсии, чем точная. Для случая независимых случайных величин дается несмещенная оценка дисперсии, в более общем случае — состоятельная оценка. Рассматриваются многомерные обобщения.

М. Г. Поборцев

11 В70. Выравнивание прямой линии по методу максимального правдоподобия, когда обе координаты подвержены нормально распределенным ошибкам измерения. Witte P. de, Vandewiele L. Maximum kans-schatting van een rechte, als beide koördinaten aan gaussiaanse fouten onderhevig zijn. «Bull. Soc. math. Belg.», 1959, **11**, № 2, 116—122 (флам.)

11 В71. Некоторые замечания к уравниванию наблюдений с неизвестными весами. Шалаевский О. В. «Докл. АН СССР», 1960, **130**, № 1, 37—40

Проводятся r групп (независимых) измерений некоторой линейной формы от m неизвестных параметров; ξ_i $(i = 1, 2, \ldots m)$ — дисперсии ошибок измерений в каждой из r групп численности $n^\alpha \geqslant m$, $\alpha = 1, 2, \ldots, r$, предполагаются также неизвестными. Оценке подлежит некоторое множество H линейных функций от параметров ξ_i. Автор указывает приближенную конструкцию доверительных областей для оценки H, используя приемы оценивания, разработанные Ю. В. Линником.

Б. В. Финкельштейн

11 В72. Проверка гипотез в физиологии методом тройных сравнений. Park G. T. Sensory testing by triple comparisons. «Biometrics», 1961, 17, № 2, 251—260 (англ.)

Метод тройного сравнения состоит в следующем. Пусть нужно упорядочить t сортов некоторой продукции в зависимости от их качества. Создаются n групп экспериментаторов по C_t^3 человек в группе. Каждому экспериментатору из i-ой группы выдаются 3 сорта исследуемой продукции, так что любой набор из трех сортов попадает к одному из экспериментаторов i-ой группы. Каждый экспериментатор упорядочивает полученные 3 сорта по их качеству. В результате каждая i-ая группа экспериментаторов предлагает свою ранжировку сортов. По результатам опытов составляется гипотеза и для ее проверки применяется некоторый критерий согласия. На примерах автор показывает, что метод тройных сравнений требует меньшего числа испытаний, чем метод парных сравнений.

М. Г. Шур

11 В73. Замечание об относительной эффективности критериев. Blyth C. R. Note on relative efficiency of tests. «Ann. Math. Statistics», 1958, **29**, № 3, 898—903 (англ.)

Даются два определения относительной эффективности двух критериев для проверки одной и той же гипотезы. Относительная эффективность критерия Стьюдента и критерия знаков вычисляется для выборок фиксированного объема и больших выборок в случае нормальных альтернатив.

О. М. Калинин

11 В74. О консервативном свойстве биномиальных критериев. David H. A. A conservative property of binomial tests. «Ann. Math. Statistics», 1960, **31**, № 4, 1205—1207 (англ.)

Пусть произродятся n независимых испытаний, где вероятность наступления данного события в i-м испытании равна π_i. Через H_0' обозначим нулевую гипотезу

$$H_0' : \frac{(\pi_1 + \pi_2 + \ldots + \pi_n)}{n} = \pi_0 \ (0 < \pi_0 < 1),$$

а через H_0 ту же самую гипотезу в случае $\pi_i = \pi$, $i = 1, 2, \ldots, n$, т. е. $H_0 \pi = \pi_0$. Автор дает элементарное доказательство неравенства

$$P(s_n \geqslant a_n \mid H_0) \geqslant P(s_n \geqslant a_n \mid H_0'), \qquad (1)$$

где s_n — число успешных испытаний, а a_n — произвольное целое число в интервале $[\pi_0 n + 1, n]$. Отмечается, что (1) было доказано раньше более сложным методом в работе Хеффдинга (РЖМат, 1958, 10084). Результат показывает возможность применять обычный критерий проверки гипотезы H_0 и в случае неоднородных испытаний.

Б. И. Пенков

11 В75. Критические значения нового многоступенчатого рангового критерия Дункана. Harter H. Leon. Critical values for Duncan's new multiple range test. «Biometrics», 1960, **16**, № 4, 671—685 (англ.)

Приводится краткое описание предложенного Дунканом (Duncan David B. Multiple range and multiple F tests. Biometrics, 1955, **11**, 1—42) критерия. Указывается

метод вычисления критических значений. Приведены таблицы, вычисленные для уровней значимости $\alpha = 0{,}1$; 0,05; 0,01; 0,005; 0,001; объема выборок $n = 2,3,4,\ldots$, 20, 22, 24,..., 40, 50, 60,..., 100 и степеней свободы $\nu = 1,2,3,\ldots$, 20, 24, 30, 40, 60, 120, ∞. А. И. Тейман

11 В76. Сравнение различных критериев проверки одной и той же гипотезы. David H. A., Perez Carmen A. On comparing different tests of the same hypothesis. «Biometrika», 1960, **47**, № 3-4, 297—306 (англ.)

Предполагается, что обычная проверка гипотезы основана на статистике v. Иногда предпочтительнее использовать статистику v', которая может быть получена быстрее. В работе ставится задача сравнения критериев, основанных на статистиках v и v', предлагается мера сравнения (например, $P\{v' > v'_\alpha | v = v_\alpha\}$ и $P\{v' > E(v'\, v = v_\alpha)\}$) и разбирается ряд примеров в случае выборки $x_1, x_2, \ldots, x_n$ из нормальной совокупности с параметрами (μ, σ):

1. $\sigma = 1$, нулевая гипотеза $H_0: \mu = 0$, $H_1: \mu > 0$. Сравниваются критерии $\bar{x}\sqrt{n} > u_\alpha$ и $\bar{x}_k\sqrt{k} > u_\alpha$ ($\bar{x}_k$ — среднее арифметическое по первым k наблюдениям; $k < n$),

2. μ неизвестно, $H_0: \sigma = 1$; $H_1: \sigma > 1$. Сравниваются критерии $w > w_\alpha$, $d > d_\alpha$, $s > s_\alpha$, где

$$s = \sqrt{\sum (x_l - \bar{x})^2/(n-1)},\quad d = \sum |x_l - \bar{x}|/n$$

и w — размах выборки.

3. σ неизвестно, $H_0: \mu = 0$, $H_1: \mu > 0$. Сравнивается $t = \bar{x}\sqrt{n}/s > t_\alpha$ с критерием знаков. В. П. Чистяков

11 В77. Статистика: Критерии значимости (I). Snelders H. A. M. Statistiek: significantietesten. (I). «Analyst (Nederl.)», 1958, **13**, № 6, 118—121 (гол.)

11 В78. О критериях порядка. Chassan J. B. On a test for order. «Biometrics», 1960, **16**, № 1, 119—121 (англ.)

Показывается возможность усилить обычный критерий χ^2 для проверки гипотезы о равенстве вероятностей $p_1 = p_2 = \ldots = p_N$ по биномиально распределенным выборкам равного объема, если альтернативной является гипотеза $p_1 < p_2, \ldots, < p_n$. Аналогичные замечания делаются для задачи проверки гипотезы о равенстве средних в N нормальных выборках. Р. Л. Добрушин

11 В79. Проблема классификации как проблема двух решений. II. Kudo Akio. The classificatory problem viewed as a two-decision problem. II. «Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ.», 1960, **A14**, № 1, 63—83 (англ.)

Ч. I см. РЖМат, 1960, 11895. Проблема классификации состоит в следующем. Заданы две сложные гипотезы Π_1 и Π_2. Заданы две выборки x_1 и x_2 из n_1 и n_2 независимых наблюдений, из совокупности с параметрами $m_1 \in \Pi_1$ и $m_2 \in \Pi_2$ соответственно. Кроме того, задана выборка y, относительно распределения которой имеется две возможности: либо оно связано со значением параметра $m_1 \in \Pi_1$, либо $m_2 \in \Pi_2$. Рассматривается рандомизированное решающее правило, позволяющее на основе x_1, x_2 и y решить, какая из гипотез имеет место (т. е. принадлежит ли распределение y Π_1 или Π_2). Вводится вероятность $p(i, m_1, m_2, \varphi)$ принять гипотезу Π_i, когда действует правило φ и параметры равны соответственно m_1 и m_2. Если задан класс решающих правил Φ, то определяется огибающая

$$\beta(i, m_1, m_2, \Phi) = \sup_{\varphi \in \Phi} P(i, m_1, m_2, \varphi).$$

Правило φ называется наиболее точным относительно класса правил Φ, если $\varphi \in \Phi$ и

$$\sup_{m_1, m_2} (\beta(i; m_1, m_2; \Phi) - P(i; m_1, m_2, \varphi)) =$$
$$= \inf_{\psi \in \Phi} \sup_{m_1, m_2} (\beta(i, m_1, m_2; \Phi) - P(i; m_1, m_2; \psi)).$$

Показывается, что решающие правила, предложенные в первой части работы (РЖМат, 1960, 11895), являются наиболее точными относительно класса решающих правил, являющихся симметричными в смысле, который определяется в каждом из рассматриваемых случаев. Рассматривается применение построенной теории к случаю двух нормальных распределений. Приводятся теоремы, аналогичные данным в первой части работы. Л. Я. Савельев

11 В80. О проверке гипотезы нормальности. Sarkadi K. On testing for normality. «Magyar tud. akad. Mat. kutató int. közl.», 1960, **5**, № 3, 269—275 (англ.; рез. русск.)

Пусть независимые случайные величины x_{ij} ($1 \leqslant i \leqslant s$, $1 \leqslant j \leqslant v$) имеют одинаковые дисперсии σ^2 и $Ex_{ij} = \mu_{..} + \mu_{i.} + \mu_{.j}$, где $\mu_{..}$, $\mu_{i.}$ и $\mu_{.j}$ — некоторые постоянные. Пусть

$$x'_i = \left(\sum_j x_{ij} + x_{iv}\sqrt{v}\right)(v + \sqrt{v})^{-1},$$

а $x'_{.j}$ определено аналогичной формулой с заменой v на s и i на j. Если к тому же

$$x'_{..} = \frac{\sum x_{ij} + \sqrt{v}\sum_i x_{iv} + \sqrt{s}\sum_j x_{sj} + x_{sv}\sqrt{sv}}{(s + \sqrt{s})(v + \sqrt{v})},$$

то случайные величины $y_{mn} = x_{mn} - x'_{m.} - x'_{.n} + x'_{..}$ ($1 \leqslant m \leqslant s-1$, $1 \leqslant j \leqslant v-1$) не коррелированы при $(i, j) \neq (k, l)$, причем $Ey_{ij} = 0$, $Dy_{ij} = \sigma^2$. Эти преобразования бывают полезны и при проверке гипотезы нормальности, если данные опыта описываются таблицей с двусторонней классификацией. Указано также преобразование, которое независимые нормальные одинаково распределенные величины с нулевым средним переводит в независимые величины, равномерно распределенные в $(-1, 1)$. М. Г. Шур

11 В81. «Вечнозеленый» коэффициент корреляции. Kendall M. G. The evergreen correlation coefficient. «Contribs Probability and Statist.» Stanford, Calif., Univ. Press, 1960, 274—277 (англ.)

Обзор в историческом разрезе исследования следующей задачи: найти функцию g такую, чтобы $Mg(r) = g(\rho)$, где ρ — коэффициент корреляции, r — выборочный коэффициент корреляции нормальной совокупности. Ее известное решение $g(r) = \frac{2}{\pi}\arcsin r$. Дается геометрическая интерпретация и приводятся некоторые интересные следствия. Указывается, что эти результаты непосредственно следуют из ранних работ Шеппарда (Sheppard W. F., Philos. Trans. Roy. Soc. London A, 1899, 192, 101—167) и Грейнера (Greiner R., Z. Math. Phys., 1909, 57, 121, 125; 337). Автор подчеркивает существующий постоянный широкий интерес к задачам, связанным с различными оценками коэффициента корреляции. Библ. 6 назв. А. И. Тейман

11 В82. Графики некоторых верхних процентных точек распределения наибольшего собственного значения. Heck D. L. Charts of some upper percentage points of the distribution of the largest characteristic root. «Ann. Math. Statistics», 1960, **31**, № 3, 625—642 (англ.)

В многомерном статистическом анализе, при проверке гипотез, возникает необходимость знать распределения характеристических корней некоторых матриц. В статье даются графики (12 штук) для определения $x_\alpha(s, m, n)$ так, чтобы вероятность $P\{\theta_\alpha \leqslant x_\alpha(s, m, n)\} = 1 - \alpha$; при $\alpha = 0.01$, 0.025, 0.05; $s = 2$, 3, 4, 5;

$m = -1/2, 0, 1, 2, \ldots, 10$; $n = 5, 6, \ldots, 1000$. Предполагается, что корни $0 < \theta_1 \leqslant \theta_2 \leqslant \ldots \leqslant \theta_s < 1$ имеют распределение (плотность вероятности)

$$p(\theta_1, \ldots, \theta_s) = \frac{\pi^{s/2} \prod_{i=1}^{s} \Gamma\left(\frac{2m+2n+s+i+2}{2}\right)}{\prod_{i=1}^{s} \Gamma\left(\frac{2m+i+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{2n+i+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{i}{2}\right)} \times$$

$$\times \prod_{i=1}^{s} \theta_i^m (1-\theta_i)^n \prod_{i>j}^{s} (\theta_i - \theta_j)$$

(что отвечает предположению о многомерном нормальном распределении исходных данных). М. Арато

11 В83. Об одном методе построения множества ортогональных сравнений. Oktaba Wiktor. On certain method of constructing sets of mutually orthogonal comparisons. «Ann. Univ. M. Curie-Skłodowska», 1958(1960), A12, 5—22 (англ.; рез. польск., русск.)

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — совокупность независимых нормально распределенных случайных величин и пусть $y_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} X_j$, где $\{b_{ij}\}$ — ортогональная и нормированная матрица. Линейные комбинации y_i, для которых $\sum_{j=1}^{n} b_{ij} = 0$, автор называет сравнениями и дает метод построения множества ортогональных сравнений. Приводятся соображения относительно возможности применения данного метода к некоторым задачам дисперсного анализа. В. П. Скитович

11 В84. Критерий для выбора случайных величин в регрессионном анализе. Linhart H. Critère de selection pour le choix des variables dans l'analyse de regression. «Schweiz. Z. Volkswirtsch. und Statist.», 1958, 94, № 2, 202—232 (франц.)

Предлагается критерий для решения, следует ли r из k заданных величин использовать при регрессионном анализе или нет. Рассматривается случай, когда k — прогнозирующих величин и прогнозируемая величина имеют $(k+1)$-мерное нормальное распределение. Критерий основан на использовании математического ожидания длины доверительного интервала для прогнозируемой случайной величины или ее среднего значения. Идея заключается в том, чтобы использовать эти величины, если математическое ожидание при этом уменьшается. В последнем разделе работы содержатся примеры, таблицы некоторых констант и графики нижних доверительных пределов для множественного коэффициента корреляции. Предложенный критерий, оказывается, является более точным, чем другие существующие, и сокращает число случайных величин, участвующих в процедуре. Из резюме автора

11 В85. О таблицах сопряженности признаков с отсутствующими данными. Batschelet E. Über eine Kontingenztafel mit fehlenden Daten. «Biometr. Z.», 1960, 2, № 4, 236—243 (нем.)

Рассматриваются таблицы сопряженности, в которых незаполненные ячейки образуют области специального вида. Автор, пользуясь методом максимального правдоподобия, вычисляет оценки для неизвестных вероятностей, соответствующих колонкам таблицы, в предположении, что эти вероятности не зависят от ее строк. Оказывается, что полученные оценки совпадают с оценками, построенными при помощи некоторых интуитивных соображений. К. П. Латышев

11 В86. Об анализе экспериментов с повторными измерениями. Danford M. B., Hughes Harry M., McNee R. C. On the analysis of repeated-measurements experiments. «Biometrics», 1960, 16, № 4, 547—565 (англ.)

Рассматривается пример (относящийся к психомоторным реакциям людей, подвергающихся радиационному облучению), связанный с повторными измерениями одних и тех же объектов. Делаются предположения и применяется техника обычного одномерного дисперсионного анализа. Предположение о равенстве дисперсий и ковариаций, предположение симметрии проверяются и оказываются не выполненными для рассматриваемых данных. Применяются процедуры многомерного анализа для случаев, когда применение одномерного анализа не обосновано. Отмечается, что асимптотически одномерный и многомерный критерии совпадают. Делается заключение, что для данного примера одномерный и многомерный анализы приводят к одним и тем же выводам. По резюме авторов

11 В87. Заметка об использовании обобщенного отношения Стьюдента в анализе изменчивости или дисперсии. Siotani Minoru. Note on the utilization of the generalized student ratio in the analysis of variance or dispersion. «Ann. Inst. Statist. Math.», 1958, 9, № 3, 157—171 (англ.)

Исследуется возможность использования статистики T^2 в качестве критерия значимости в двухфакторной модели и в многомерном дисперсионном анализе. Пусть $x_{ij}^{(\nu)} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \delta_\nu + \varepsilon_{ij} + \gamma_{ij}$ $(i = 1, \ldots, p, \quad j = 1, \ldots, q, \quad \nu = 1, \ldots, n)$, $\sum_i \alpha_i = \sum_j \beta_j = \sum_i \gamma_{ij} = \sum_j \gamma_{ij} = 0$, где ε_{ij} нормальны, с нулевым математическим ожиданием и корреляционной матрицей Λ. Для проверки гипотезы $\alpha_i \equiv 0$ предлагается использовать статистику

$$T^2 = (n-1)\bar{y}\, \bar{S}\, \bar{y}', \text{ где } S = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} (y_\nu - \bar{y})'(y_\nu - y),$$

$$\bar{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_{p-1} \ldots), \; y_\nu = (y_{1\nu}, \ldots y_{p-1\nu}),$$

$$y_{i\nu} = x_{i\nu} - x_{p\nu} \text{ и } x_{i\nu} = \sum_{j=1}^{q} x_{ij}^{\nu}.$$

Аналогично могут проверяться гипотезы $\beta_j \equiv 0$ и $\gamma_{ij} \equiv 0$. Исследуется асимптотическая мощность этого критерия. Рассматривается случай больших и небольших n. Для случаев $p = 3, 4$ приводятся таблицы при 5% и 1% уровнях значимости. Возможность использования обобщенного критерия T^2 в многомерном дисперсионном анализе иллюстрируется простым примером. Б. В. Финкельштейн

11 В88. Планирование эксперимента в нелинейном случае. Box G. E. P., Lucas H. L. Design of experiments in non-linear situations. «Biometrika», 1959, 46, № 1-2, 77—90 (англ.)

Предполагается, что $\eta = f(\xi_1, \ldots, \xi_k; \; \theta_1, \ldots, \theta_p)$ нелинейна по переменным ξ и параметрам θ. Задача состоит в выборе таких значений, ξ при которых p параметров θ можно было бы оценить с возможно большей точностью по наблюденным значениям η, если на эти наблюдения накладывается случайная ошибка. Решение задачи, т. е. программа эксперимента задается $N \times k$ матрицей $D = \{\xi_{iu}\}$ (N — число экспериментов) u-я строка матрицы $(\xi_{1u}, \xi_{2u}, \ldots, \xi_{ku})$ задает значения переменных, которые нужно придать переменным $\xi_1, \ldots, \xi_k$ при u-м испытании. Предполагается, что ξ принимает значения в некоторой ограниченной области.

Результатом u-го опыта является случайная величина y_u. Предполагается, что $My_u = \eta_u = f(\xi, \theta)$ и

$$M(y_u - \eta_u)(y_v - \eta_v) = \begin{cases} \sigma^2 & \text{при } u = v, \\ 0 & \text{при } u \neq v, \end{cases} \quad u, v = 1, 2, \ldots, N.$$

Предполагается, что априори известно, что истинное значение параметра близко к θ^*. Строится матрица $F = \{f_{ru}\}$, где

$$f_{ru} = \frac{\partial}{\partial \theta_r} f(\xi_u, \theta)\Big|_{\theta = \theta^*}.$$

Приводятся соображения, говорящие о том, что в качестве решения разумно принять набор ξ, при котором определитель $|F^{*'}F^*|$ максимален; $F^* = \{f_{ru}\}$. В случае $N = p$ пригодится весьма наглядная геометрическая интерпретация проблемы. Отмечается возможная неоднозначность решения и указывается, что в общем случае необходимо численное решение. В работе указывается на существование вырожденных случаев, когда максимизация определителя невозможна, и приводится решение ряда конкретных задач.

В. А. Маковский

11 В89. Ступенчатый план: Теория. Graybill Franklin A., Pruitt William E. The staircase design: theory. «Ann. Math. Statistics», 1958, 29, № 2, 523—533 (англ.)

План рандомизированных блоков распространяется на случай, когда в блоках содержится неодинаковое число экспериментальных единиц. Рассматривается модель двухсторонней классификации

$$Y_{ij} = \mu + \beta_i + \alpha_j + e_{ij},$$
$$i = 1, 2, \ldots, c_j;\ j = 1, 2, \ldots, N.$$

μ, β_i, α_j — константы, e_{ij} — независимые нормальные случайные величины, однако распределенные с параметрами $(0, \sigma^2)$. Индексы j упорядочены так, что $c_j \geqslant c_{j'}$, если $j < j'$. Эти индексы разбиваются на подмножества: j, j' принадлежат одному подмножеству, если $c_j = c_{j'}$. Такие подмножества называются ступенями. Для проверки гипотезы $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_N$ по экспериментальным данным определенным образом конструируется случайная величина v, которая, как доказывается, имеет фишерово распределение. Далее показывается, что к той же статистике V приводит метод наименьших квадратов. В работе также приводятся наилучшие линейные несмещенные оценки для $\alpha_s - \alpha_t$ и дисперсии этих оценок. В. А. Маковский

11 В90. Дисперсный анализ как альтернатива факторному анализу. Creasy Monica A. Analysis of variance as an alternative to factor analysis. «J. Roy. Statist. Soc.», 1954, **B19**, № 2, 318—325 (англ.)

Указывается аналогия между факторным анализом и дисперсионным анализом. Упрощение факторных нагрузок не обязательно влияет на конечный результат. Рассматриваются взаимодействия факторов и предлагается, чтобы батареи тестов планировались таким образом, чтобы последние могли быть измерены и проверены. Приводятся примеры. Резюме автора

11 В91. Планирование линейных экспериментов. Elfving G. Design of linear experiments, «Probability and statistics. Stockholm, Almqvist and Wiksell, New York, John Wiley and Sons», 1959, 58—74 (англ.)

В большинстве классических работ по планированию экспериментов большое значение придавалось комбинаторным аспектам: при помощи построения достаточно симметричных планов авторы старались придать процедурам оценки наиболее удобную форму. В ранний период развития этой области мало заботились о выборе наилучшего плана; тем не менее симметричность классических планов обеспечивала им высокую эффективность, которая несомненно интуитивно принималась в расчет авторами. В последние же шесть—семь лет появилось несколько работ, в которых на основе тех или иных критериев авторы дают методы построения наилучших планов, или устанавливают, что некоторые из известных планов являются оптимальными. Настоящая статья представляет собой попытку дать краткий обзор этого направления исследований, относящихся только к линейным экспериментам и состоит главным образом из перечисления результатов с комментариями основных понятий, методов и выводов. Даются ссылки на работы, в которых приведены доказательства.

Резюме автора

11 В92. Дисперсионный анализ. Pompilj Giuseppe. Analisi della varianza. «Archimede», 1959, **11**, № 4, 175—180 (итал.)

Работа автора является частью серии его публикаций в журнале Archimede (1952, 1956, 1957), имеющей своей целью изложить теорию планирования экспериментов, на основе теории вероятностей. В настоящей заметке рассматривается задача дисперсионного анализа с двумя факторами. Б. И. Пенков

11 В93. Дробно-факториальные эксперименты с факторами на двух уровнях.— Fractional factorial experiment designs for factors at two levels. «Nat. Bur. Standards Appl. Math. Ser.», 1957, № 48, iv, 85 pp. (англ.)

11 В94. Дисперсионный анализ на сфере. Watson G. S. Analysis of dispersion on a sphere. «Monthly Not. Roy. Astron. Soc. Geophys. Suppl.», 1956(1957), **7**, 153—159

11 В95. Критерий случайности направлений. Watson G. S. A test for randomness of directions. «Monthly Not. Astron. Soc. Geophys. Suppl.», 1956(1957), **7**, 160—161 (англ.)

11 В96. Локально наиболее мощные ранговые критерии для двухвыборочных проблем. Uzawa Hirofumi. Locally most powerful rank tests for two-sample problems. «Ann. Math. Statistics», 1960, **31**, № 3, 685—702 (англ.)

Для двух выборок $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с распределением $F(x)$ и $x_{n_1+1}, \ldots, x_n$ $(n = n_1 + n_2)$ с распределением $G(x)$ определяется статистика $z_j = 0$ или 1 в зависимости от того, принадлежит ли j-й член вариационного ряда, простроенного по обеим выборкам, первой или второй выборке. Нерандомизированный ранговый критерий φ может быть определен в форме

$$\varphi_T(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 0, & \text{если } T(z_1, \ldots, z_n) < c, \\ 1, & \text{если } T(z_1, \ldots, z_n) > c, \end{cases}$$

где T — данная функция $z_1 z_2, \ldots, z_n$. Ранговый критерий φ_T называется локально наиболее мощным относительно однопараметрического семейства альтернатив $\{F(x, \theta), G(x, \theta);\ 0 \leqslant \theta \leqslant \bar{\theta}\}$, если при некотором θ_0 $\beta_{\varphi_T}[F(x, \theta), G(x, \theta)] \geqslant \beta_\varphi[F(x, \theta), G(x, \theta)]$, $0 < \theta < \theta_0$ для всех φ одинакового объема с φ_T. При этом $\beta_\varphi(F, G)$ есть функция мощности критерия φ:

$$\beta_\varphi(F, G) = \sum_z \varphi(z) P(z \mid F, G);$$

объем критерия определяется формулой

$$\alpha_\varphi = \sum_z \varphi(z) P(z \mid F, F),$$

где $P\{z \mid F, G\}$ — вероятность того, что $(z_1, \ldots, z_n) = z$, когда x_i имеют распределения F и G. Однопараметрическое семейство альтернатив $\{F(x, \theta), G(x, \theta);\ 0 \leqslant \theta \leqslant \bar{\theta}''\}$ обладает следующими свойствами: $F(x, 0) = G(x, \theta)$ и $H(t, \theta) = G[F^{-1}(t, \theta), \theta]$ дифференцируемо в нуле по θ

равномерно относительно t. Доказана теорема: Локально наиболее мощный ранговый критерий φ_T относительно однопараметрического семейства $\{F(x, \theta), G(x, \theta); 0 \leqslant \theta \leqslant \theta\}$ определяется единственным образом для каждого объема критерия статистикой

$$T(z) = \sum_{j=1}^{n} a_j z_j,$$

где

$$a_j = c_{n-1}^{j-1} \int_0^1 t^{j-1} (1-t)^{n-j}\, dQ(t) \quad (1 \leqslant j \leqslant n);$$

$$Q(t) = \left[\frac{\partial H(t, \theta)}{\partial \theta}\right]_{\theta=0}.$$

Описаны локальные наиболее мощные ранговые критерии для следующих двухвыборочных проблем с нулевой гипотезой $H_0: F = G$ и альтернативами $H_1: F \neq G$; $H_2: F \geqslant G$; $H_3: F \neq G$; F и G симметричны с одинаковой медианой; $H_4: F \neq G$ и $\int F dG \geqslant \frac{1}{2}$. В. С. Королюк

11 В97. Вклад в теорию ранговых статистик, случай одной выборки. Savage I. Richard. Contributions to the theory of rank order statistics-the one-sample case. «Ann. Math. Statistics», 1959, 30, № 4, 1018—1023 (англ.)

Пусть $Z = (Z_1, \ldots, Z_N)$ — случайный вектор с компонентами $Z_i = 1(0)$, если при упорядочении выборки по модулю объема N i-й член слева положителен (отрицателен). Тогда

$$P(Z = z) = N! \int\limits_{0 \leqslant y_1 \leqslant \ldots \leqslant y_N \leqslant \infty} \prod_{i=1}^{N} \left[f^{1-z_i}(-y_i) f^{z_i}(y_i)\, dy_i\right].$$

Выводятся условия, при которых $P(Z = z) > P(Z = z')$, где z получается из z' заменой некоторых 0 на 1 или перестановкой некоторых пар 0 и 1 таких, что при этих перестановках 1 переходит слева направо. Этим условиям удовлетворяют нормальное и другие распределения. Результаты могут быть полезны для построения хороших критериев таких нулевых гипотез, как: $X_1, \ldots, X_N$ — независимые одинаково распределенные величины, симметричные относительно нуля, — против альтернативы одностороннего сдвига. Ранговый критерий знаков Уилкоксона представляет пример непараметрической процедуры, удовлетворяющей этим условиям. Резюме автора

11 В98. Таблица объемов случайных выборок, нужных для получения непараметрических толерантных областей. Jílek M., Likař O. Table of random sample sizes, needed for obtaining non-parametric tolerance regions. «Zastosow. mat.», 1960, 5, № 2, 155—160 (англ.; рез. польск., русск.)

Автор приводит таблицу случайных объемов выборок, нужных для получения непараметрических толерантных областей для $m = s$, 2(2)10, и p, $P = 0{,}50$; 0,75; 0,90; 0,95; 0,975; 0,99; 0,995; 0,999, где m обозначает количество элементов случайной выборки объема n, которые лежат вне толерантной области; P обозначает вероятность события: внутри толерантной области лежит по крайней мере $p\%$ совокупности. L. Kubik

11 В99. Непараметрические статические выводы. Wilks S. S. Non-parametric statistical inference Probability and statistics. Stockholm, Almqvist and Wiksell; «New York, John Wiley and Sons», 1959, 331—354 (англ.)

Обзор основных результатов по непараметрическим статистикам. Рассматриваются порядковые статистики вариационного ряда, выборочные квантили, различные отклонения выборочной функции распределения от теоретической. Рассматриваются также вопросы построения доверительных интервалов для случайной величины (непараметрические доверительные интервалы) и вопросы статистической проверки непараметрических гипотез. Библ. 51 назв. В. Ф. Писаренко

11 В100. О непараметрических методах математической статистики. Schmetterer Leopold. Über nichtparametrische Methoden in der mathematischen Statistik. «Jahresber. Dtsch. Math.-Ver.», 1959, 61, № 3, 104—126 (нем.)

Обзорный доклад по теории несмещенных оценок с точки зрения теории решающих функций и непараметрическим критериям. Асимптотические постановки вопроса почти не затрагиваются. Стиль изложения абстрактный и четкий. Формулируется 16 теорем. Библ. более 40 назв. Р. Л. Добрушин

11 В101. Об отклонении двумерных эмпирических функций распределения. Vincze Istvá n. Kétváltozós empirikus eloszlásfüggvények eltéréséről. «Magyar tud. akad. Mat. és fiz. tud. oszt. közl.», 1960, 10, № 3, 361—372 (венг.)

Автор доказывает теорему о расхождении между двумя двумерными эмпирическими функциями распределения. Пусть

$$(\xi, \eta_i) \text{ и } (\xi_i', \eta_i'), \quad i = 1, 2, \ldots, N$$

— случайные выборки из двух двумерных совокупностей с распределениями $F(x, y)$ и $G(x, y)$. Пусть $F_N(x, y)$ и $G_N(x, y)$ обозначают соответствующие эмпирические функции распределения. Пусть

$$D_{NN}^{+}(y) = \max_x (F_N(x, y) - G_N(x, y)),$$

$$D_{NN}(y) = \max_y |F_N(x, y) - G_N(x, y)|.$$

Согласно вероятностному закону $F(\infty, y)$ выбирается случайно значение $y = \eta$. Пусть $p_{NN}^{(k)}$ и p_{NN}^{k} обозначают вероятности, что $D_{NN}^{+}(\eta)$ и $D_{NN}(\eta)$ не превосходят k/N соответственно. Вероятности $p_{NN}^{(k)}$ и p_{NN}^{k} имеют следующий комбинаторный смысл: пусть перестановки $v_1, v_2, \ldots, v_\lambda$ составлены из λ элементов последовательности $\underbrace{(+1, +1, \ldots, 1}_{n}, \underbrace{-1, -1, \ldots -1)}_{n}$, причем вероятность выбрать каждую перестановку равна $\frac{(2n)!}{(2n-\lambda)!}$.

Пусть λ будет также случайной величиной, равномерно распределенной по числам $0, 1, \ldots, 2N$. Тогда

$$p_{NN}^{(k)} = P\left(\max_{0 \leqslant j \leqslant \lambda} (v_1 + \ldots + v_j) < k\right)$$

и

$$p_{NN}^{k} = P\left(\max_{0 \leqslant j \leqslant \lambda} |v_1 + \ldots + v_j| < k\right).$$

Теорема, доказанная в статье, дает точные вероятности $p_{NN}^{(k)}$ и p_{NN}^{k} и их предельные значения. Предельное

значение для p_{NN}^{k} таково:

$$\lim_{N\to\infty} p_{NN}^{k} = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} (-1)^j e^{-2j^2v^2} \int_0^1 \left[\Phi\left(\frac{1-2j(1-z)}{\sqrt{z(1-z)}} v \right) - \right.$$

$$\left. - \Psi\left(\frac{-1-2j(1-z)}{\sqrt{z(1-z)}} v \right) \right] dz,$$

где $k/\sqrt{2n} \to v$ и $\Phi(x) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\, du$.

K. Sarkadi

11 В102. Техника функциональных уравнений для получения распределений функционалов от винеровского процесса в теоремах типа Колмогорова — Смирнова. Kiefer J. A functional equation technique for obtaining Wiener process probabilities associated with theorems of Kolmogorov—Smirnov type. «Proc. Cambridge Philos. Soc.», 1959, 55, № 4, 328—332 (англ.)

Предлагается новый подход построения дифференциальных уравнений для распределений функционалов в граничных задачах блуждания в винеровском процессе, основанный на вариации границ. В частности, получены уравнения для распределений статистик Колмогорова и Смирнова и некоторых их многомерных аналогов. В. С. Королюк

11 В103. Непараметрическая линейная оценка общей медианы симметричных популяций по симметрично цензурированным наблюдениям. Walsh John E. Nonparametric linear estimation of common median of symmetrical populations from symmetrically censored observations. «Sankhya Indian J. Statist.», 1960, 22, № 3-4, 295—300 (англ.)

Пусть $x(1) \leqslant x(2) \leqslant \ldots \leqslant x(n)$ — упорядоченная выборка случайной величины с симметричной функцией распределения. Наблюдения симметрично цензурированы, т. е. известны только значения $x(r), x(r+1), \ldots, x(n-r), x(n+1-r)$, где $0 < r \leqslant \frac{n+1}{2}$. Рассматриваются оценки для медианы φ вида

$$\hat{\varphi} = \hat{\varphi}\,[a(r), \ldots, a(n+1-r)] = \sum_{i=r}^{n+1-r} a(i)x(i),$$

причем $a(l) = a(n+1-l)$, $\sum_{i=r}^{n+1-r} a(i) = 1$, и основанные на них доверительные интервалы. Даются рекомендации по выбору коэффициентов $a(i)$. Все $a(i)$ разделяются на 3 группы:

$$a(r), a(r+1) = \ldots = a\left(\frac{n+1+r}{A}\right), a\left(1 + \right.$$

$$\left. + \frac{n+1+r}{A}\right) = \ldots = a\left(\frac{n+1}{2}\right)$$

и далее по симметрии (в $a(z)$ дробное z заменяется на наибольшее целое, не превосходящее $z + \frac{1}{2}$). Таким образом, коэффициенты $a(i)$ определяются заданием A и двух из величин $a(r), a(r+1), a\left(\frac{n+1}{2}\right)$. Формулируется ряд правил выбора этих величин для различных форм распределений. В качестве примера приведем первое из них: «для U-образного распределения $a(r+1) = 0$, $a(r)$ велико и положительно, A возрастает, когда вид распределения приближается к прямоугольному». Далее для $r = 1$ рассматривается построение критериев и доверительных областей, основанных на $\hat{\varphi}$.

Д. М. Чибисов

11 В104. Верхняя граница для дисперсии «тау» Кендалла и аналогичных статистик. Hoeffding Wassily. An upper bound for the variance of Kendall's «TAU» and of related statistics. «Contribs Probability and Statist.» Stanford, Calif., Univ. Press, 1960, 258—264 (англ.)

Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины и

$$U = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} f(X_i, X_j),$$

причем $f(X_1, X_2) = f(X_2, X_1)$, $0 \leqslant f(X_1, X_2) \leqslant 1$. Математическое ожидание и дисперсия U равны

$$E(U) = p, \quad \mathrm{var}(U) = \frac{2}{n(n-1)} \{2(n-2)(r-p^2) + s - p^2\},$$

где $p = Ef(X_1, X_2)$, $r = Ef(X_1, X_2)f(X_1, X_3)$, $s = Ef^2(X_1, X_2)$.

Доказывается неравенство

$$r - p^2 \leqslant H(p) = \begin{cases} p^{\frac{3}{2}} - p^2, & p \geqslant \frac{1}{2} \\ (1-p)^{\frac{3}{2}} - (1-p)^2, & p \leqslant \frac{1}{2}, \end{cases}$$

которое вместе с $s \leqslant p$ дает верхнюю границу

$$\mathrm{var}(U) \leqslant \frac{2}{n(n-1)} [2(n-2)H(p) + p - p^2].$$

Так как $\sqrt{n}(U-p)$ распределено асимптотически нормально, то граница для дисперсии, зависящая только от p, позволяет получить приближенную доверительную область для p и нижнюю границу мощности критерия, основанного на U. Д. М. Чибисов

11 В105. О мощности некоторых ранговых порядковых критериев сравнения двух выборок. Rosenblatt Joan Raup. On the power of some rank-order two-sample tests. «Contribs Probability and Statist.» Stanford, Calif., Univ. Press, 1960, 358—370 (англ.)

Рассматриваются выборки независимых случайных величин X и Y объемов n и m с функциями распределения $F(x)$ и $G(y)$. Пусть $\vartheta(F, G) = P(X < Y)$. Рассматриваются нулевые гипотезы двух видов: 1) $F = G$, 2) гипотезы, выражаемые в терминах $\vartheta(F, G)$. Пусть $n < m$,

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x < y, \\ 0, & \text{если } x \geqslant y, \end{cases}$$

$$mnU_{mn} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \varphi(x_i, y_j), \quad nW_{mn} = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i, y_i).$$

При сравнении критериев, основанных на U_{mn} (Вилкоксона) и на W_{mn} доказывается, что критерий Вилкоксона в некотором смысле хуже, а именно: при проверке гипотезы $\vartheta \leqslant \vartheta_1$ против $\vartheta \geqslant \vartheta_2$ ($\vartheta_1 < \vartheta_2$) критерий, основанный на W_{mn}, максимизирует минимум мощности. Кроме того, при некоторых уровнях значимости он имеет большую мощность, чем критерий Вилкоксона. Однако доказательство этого основано на рассмотрении «неестественных» пар распределений: распределение F сосредоточено на двух непересекающихся отрезках, между которыми находится отрезок, содержащий распределение G. Некоторые ограничения, выполняющиеся для «обычных» семейств распределений, исключают также пары, и доказательство теряет силу. Кроме того, для ранговых порядковых критериев непосредственным рассмотрением вероятностей различных расположений проводится подробное исследование свойств критериев при малых объемах выборок ($(mn) = (1, 2), (2, 2), (2, 3)$).

Д. М. Чибисов

11 В106. Мощность некоторых двух выборочных непараметрических критериев. Sukhatme Balkrishna V. Power of some two-sample non-parametric tests. «Biometrika», 1960. 47, № 3-4, 355—362 (англ.)

Для двух выборок $x_1, x_2, \ldots, x_m$ и $y_1, y_2, \ldots, y_n$ с функциями распределения $F(x)$ и $G(x)$ соответственно выписаны распределения следующих двух известных статистик:

$$W = m - \sum_{j=1}^{n} H(Y^{(1)}, X_j, Y^{(n)}),$$

и

$$D = R_m - R_n + n.$$

Здесь

$$Y^{(1)} = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} Y_i, Y^{(n)} = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} Y_i;$$

$$H(u, v, w) = \begin{cases} 1, & \text{если } u \leqslant v \leqslant w, \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

R_m и R_n — размахи рангов первой и второй выборок в общей выборке (т. е. разности ранговых номеров крайних членов этих выборок). Утверждается, что при проверке гипотезы $F = G$ мощность W-критерия больше, чем мощность D-критерия для всех альтернатив. Приведены таблицы для мощностей этих критериев при некоторых альтернативах и малых объемах выборок, иллюстрирующие это утверждение. В. С. Королюк

11 В107. О некоторых вероятностных распределениях, связанных с последовательностью наблюдений, и их приложения. Krishna Iyer P. V., Singh B. N. On certain probability distributions arising from a sequence of observations and their applications. «J. Indian Soc. Agric. Statist.», 1955, 7, № 1-2, 127—168 (англ.)

С целью испытания 1) является ли данная последовательность наблюдений случайной или нет; 2) происходят ли две или более выборки из одной и той же совокупности, — определяются некоторые статистики. Они основаны не только на соотношениях между смежными наблюдениями или же всеми возможными парами наблюдений, но и на соотношениях только между парами, разделенными ровно r или меньшим числом наблюдений. В качестве частных случаев получаются статистики Уилкоксона, статистика τ Кендалла и некоторые другие. Рассматриваются свойства этих статистик; например, они асимптотически нормальны. Исследуется мощность и эффективность критериев, основанных на этих статистиках, и показывается, что они являются более мощными, чем известные ранее. Приводятся таблицы и графики для мощностей различных критериев. Результаты имеют место как для непрерывных, так и для дискретных распределений. E. Csáki

11 В108. Некоторые непараметрические критерии для задачи сравнения k выборок. Fisz M. Some nonparametric tests for the k-sample problem, «Colloq. math.», 1960, 7, № 2, 289—296 (англ.)

Обзор критериев для проверки гипотезы о тождественности функций распределения k независимых выборок, являющихся обобщениями критериев Смирнова для двух выборок, основанных на максимуме разности эмпирических функций распределения и максимуме модуля этой разности. Д. М. Чибисов

11 В109. Распределение суммы баллов S Кендалла для пары объединенных ранжировок. Burr E. J. The distribution of Kendall's score S for a pair of tied rankings. «Biometrika», 1960, 47, № 1-2, 151—171 (англ.)

Пусть n объектов классифицируются по двум признакам, каждый из которых может не допускать точной количественной шкалы, но допускает известное число различимых градаций l по одному, n — по другому признаку ($2 \leqslant l \leqslant n$, $2 \leqslant m < n$). Каждой паре объектов отвечает балл, равный $+1$, если ранги обоих объектов в ранжировках по обоим признакам имеют сходный порядок следования; балл, равный -1, отвечает обратному порядку следования рангов в ранжировках и балл равен 0, если оба объекта по какому-либо признаку попадают в одну и ту же группу (имеют один и тот же ранг). При гипотезе независимости признаков разыскивается распределение суммы S баллов. Приводится таблица вероятностей $P(s)$ для значений n в пределах $2 < n \leqslant 6$ при различных l и m. Для $n = 8, 10, 12$ производится сравнение точных уровней значимости с приближенным, вычисленных с помощью нормальной аппроксимации. Ю. И. Медведев

11 В110. Критерий согласия, основанный на наибольшем выборочном промежутке. Weiss Lionel. A test of fit based on the largest sample spacing. «J. Soc. Industr. and Appl. Math.», 1960, 8, № 2, 295—299 (англ.)

Пусть $0 = Y_0 \leqslant Y_1 \leqslant Y_2 \leqslant \ldots \leqslant Y_n \leqslant Y_{n+1} = 1$ — вариационный ряд n наблюдений над случайной величиной X с некоторым непрерывным распределением на $[0, 1]$, $T_i = Y_i - Y_{i-1}$. Величина $V = \max_i \{T_i\}$ называется наибольшим выборочным промежутком. На основе статистики V проверяется гипотеза H_0: X имеет равномерное распределение $U(x) = x$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, против сложной альтернативы H_1 : X имеет любое непрерывное распределение $F(x)$, $F(x) = 0$ для $x < 0$, $F(x) = 1$ для $x > 1$, отличное от $U(x)$. Автор показывает, что критерий уровня α: отвергнуть H_0, если $V > d_n(\alpha)$ (критическая точка $d_n(\alpha)$ выбирается согласно уровню значимости α и объему выборки n), 1) является допустимым, т. е. не существует равномерно (относительно множества всех альтернативных распределений) более мощного критерия того же уровня и 2) является состоятельным, т. е. вероятность ошибки второго рода стремится к 0 при $n \to \infty$. Последнее доказывается на основе изящно выводимого автором асимптотического распределения V при гипотезе H_0:

$$\lim_{n \to \infty} P\left\{V < \frac{\log(n+1) + a}{n+1}\right\} = \exp(e^{-a}).$$

Изложенная процедура позволяет проверять гипотезу, что случайная величина X имеет вполне определенное распределение $F(x)$, так как преобразование $F(X)$ приводит к равномерному распределению.

Примечание референта. Доказательство состоятельности проходит лишь при более сильном условии, чем упоминает автор, а именно существует интервал $(a, b) \in [0, 1]$, на котором альтернативная плотность $f(x)$ непрерывна и $f(x) < 1 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

И. Ф. Красичков

11 В111. Асимптотическая мощность некоторых непараметрических критериев относительно сдвига (Тезисы). Смирнов Н. В. «Тр. Всес. совещания по теории вероятностей и матем. статистике, 1958». Ереван, АН АрмССР, 1960, 98—100

11 В112. Оценка максимального правоподобия в положительно регулярных марковских цепях. Bhat B. R. Maximum likelihood estimation for positively regular Markov chains. «Sankhya Indian J. Statist.», 1960, 22, № 3-4, 339—344 (англ.)

Рассматривается цепь Маркова с конечным числом возможных состояний (s) и переходными вероятностями $\pi = \{\pi_{ij}\}$ ($i, j = 1, 2, \ldots, s$). Предполагается, что имеет место «положительная регулярность», т. е. стационарное распределение $\pi_i > 0$, $i = 1, \ldots, s$. Доказывается следующая:

Лемма 1. Если π зависит от одного неизвестного параметра θ и функция $T(p_{ij})$, где $\{p_{ij}\}$ — стохастические матрицы, таковы, что: а) $T(\pi_{ij}) = \theta$, б) $T(p_{ij})$ имеет непрерывные первые производные, то $T\left(\frac{n_{ij}}{n_i}\right)$

асимптотически нормально распределена с математическим ожиданием θ и дисперсией

$$D(T)=\frac{1}{n}\sum_i\frac{1}{\pi_i}\left\{\sum_j\pi_{ij}\left(\frac{\partial T\pi_{ij}}{\partial p_{ij}}\right)^2-\left(\sum_j\pi_{ij}\frac{\partial T(\pi_{ij})}{\partial p_{ij}}\right)^2\right\},$$

кроме того,

$$nD(T)\geqslant\frac{1}{i(\theta)},\ \text{где}\ i(\theta)=\sum_{i,j}\pi_i\pi_{ij}\left(\frac{1}{\pi_{ij}}\frac{\partial\pi_{ij}}{\partial\theta}\right)^2.$$

Здесь $n_i=\sum_j n_{ij}$, $n=\sum_{i,j}n_{ij}$, где n_{ij} — число переходов из состояния i в j в течение времени n. Из этой леммы следует состоятельность и асимптотическая нормальность оценки. М. Арато

11 В113. Эффективные оценки для рядов зависимых величин. Mihoc G. Fonctions d'estimation efficiente pour les suites de variables dépendantes. «Bull. math. Soc. sci. math. et phys. RPR», 1957, **1**, № 4, 449—456 (франц.)

Рассматривается простая однородная цепь Маркова $x_1, x_2, \ldots, x_\omega, \ldots$ и выборка из нее $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Для оценки вероятностей перехода p_{ij} по выборке В. И. Романовским было предложено брать отношение n_{ij}/n_i, где n_i — число элементов выборки, отвечающих состоянию a_i, а n_{ij} — число случаев, когда состоянию a_j предшествует состояние a_i. В работе показывается, что такого рода оценки являются асимптотически эффективными. В. П. Скитович

11 В114. Об оценке спектра стационарного стохастического процесса. Parthasarathy K. R. On the estimation of the spectrum of a stationary stochastic process. «Ann. Math. Statistics», 1960, **31**, № 3, 568—573 (англ.)

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_N$ — наблюдения над дискретным слабо стационарным процессом $\{x_t\}$. Изучаются оценки спектральной функции $F(\lambda)$ и спектральной плотности $f(\lambda)$ процесса $\{x_t\}$ вида:

$$F_N^*(\lambda)=\int_{-\pi}^{\lambda}f_N^*(\lambda)\,d\lambda,$$

$$f_N^*(\lambda)=\frac{1}{2\pi N}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\sum_{t=1}^{N}x_te^{it(\lambda+u)}\right|^2\frac{R}{r}K_r\left(\frac{Ru}{r}\right)du,$$

где

$$K_r(t)=\frac{\left(\frac{\sin t/2}{t/2}\right)^{2r}}{\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin t/2}{t/2}\right)^{2r}dt}.$$

Доказано, что для состоятельности оценки $F_N^*(\lambda)$ требуется лишь сходимость почти наверное выборочных ковариаций процесса x_t к истинным. Оценивается смещение в $F_N^*(\lambda)$. Специальный выбор r и R дает асимптотически несмещенную и состоятельную оценку для $F(\lambda)$. Далее доказано, что если выборочные дисперсия и ковариации процесса сходятся почти наверное и в среднем к истинным дисперсии и ковариациям, то существуют r и R, зависящие не только от числа наблюдений N, но и от самих наблюдений, такие, что $f_N^*(\lambda)$ сходится почти наверное к $f(\lambda)$ равномерно по λ. Предполагается сходимость ряда $\sum_{-\infty}^{\infty}|\rho_k|$, где $\{\rho_k\}$ — ковариационная последовательность процесса. При этом состоятельность $F_N^*(\lambda)$ остается в силе при условии, что r и R стремятся к ∞ с вероятностью 1. А. П. Хусу

11 В115. Приближенные распределения оценок спектра шума. Freiberger Walter, Grenander Ulf. Approximate distributions of noise power measurements. «Quart. Appl. Math.», 1959, **17**, № 3, 271—283 (англ.)

Рассматривается оценка вида:

$$Q=\frac{1}{n}\sum_{\nu,\mu=1}^{n}w_{\nu-\mu}x_\nu x_\mu$$

для спектральной плотности $f(\lambda)$ гауссовского стационарного процесса x_t ($t=0, \pm1, \pm2, \ldots$), где

$$w_k=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{ik\lambda}w(\lambda)\,d\lambda,\ w(\lambda)\geqslant0,\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}w(\lambda)\,d\lambda=1.$$

С помощью теории форм Теплица устанавливается, что уже для не слишком больших значения n

$$M\exp[izQ\mid f(\lambda_0)]\approx$$

$$\approx\exp\left[-\frac{n}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log\left(1-\frac{2izw(\lambda)}{n}\right)d\lambda\right].$$

Приведены результаты численных расчетов точных и приближенных функций распределения величины Q для различных функций $f(\lambda)$ и $w(\lambda)$ при $n=20$.

А. А. Филиппова

11 В116. Статистический анализ случайных процессов. Rosenblatt M. Statistical analysis of stochastic processes with stationary residuals. «Probability and statistics. Stockholm, Almqvist and Wiksell, New York, John Wiley and Sons», 1959, 246—275 (англ.)

Работа посвящена двум основным вопросам. Во-первых, оценке спектра многомерного стационарного процесса; во-вторых, оценкам коэффициентов регрессии. Формулировкам новых теорем в работе предшествует краткий обзор уже имеющихся результатов. Главным результатом является получение асимптотических формул для дисперсий этих оценок. При некоторых условиях «регулярности» стационарного процесса x_t доказывается, что оценка

$$f_N(\lambda)=\int_{-\pi}^{\pi}w_N(\mu,\lambda)I_N(\mu)\,d\mu$$

спектральной плотности $f(\lambda)$ (где

$$I_N(\lambda)=\frac{1}{2\pi N}\left|\sum_{t=1}^{N}x_te^{-it\mu}\right|^2,$$

а последовательность $\{w_N(\mu,\lambda)\}$ «сходится» к δ-функции и удовлетворяет определенным требованиям) имеет дисперсию

$$\sigma_N^2(f_N(\lambda))=\begin{cases}\dfrac{2\pi f^2(\lambda)}{N}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}w_N^2(\mu,\lambda)\,d\mu,&\lambda\neq0,\\[2ex]\dfrac{4\pi f^2(0)}{N}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}w_N^2(\mu,0)\,d\mu,&\lambda=0,\end{cases}$$

если спектральная плотность $f(\lambda)$ процесса x_t отлична от нуля. Этот результат переносится на многомерный случай. Далее рассматривается стационарный процесс x_t с нулевым средним и процесс $y_t=m_t+x_t$ со средним $m_t=\beta_1\varphi_t^1+\beta_2\varphi_t^2+\ldots+\beta_s\varphi_t^s$, где коэффициенты $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$ являются неизвестными. Требуется определить эти коэффициенты по $y_1, y_2, \ldots, y_N$ и $\varphi_1^i, \varphi_2^i, \ldots, \varphi_N^i$ ($i=1, \ldots, s$). Рассматриваются две оценки для вектора-столбца $\beta=\{\beta_i\}_{i=1,\ldots,s}$: оценка

$$\beta_L=(y-\varphi\beta)'(y-\varphi\beta)$$

по методу наименьших квадратов (здесь $y = \{y_t\}_{t=1,\ldots,N}$ есть вектор-столбец, а

$$\varphi = \{\varphi_t^i\}_{\substack{t=1,\ldots,N \\ i=1,\ldots,s}}$$

есть матрица из N строк и S столбцов) и так называемая «марковская оценка»

$$\beta_M = [\varphi' R^{-1} \varphi]^{-1} \varphi' R^{-1} y$$

(здесь R есть матрица ковариаций величин $\{y_t\}_{t=1,\ldots,N}$). Выводится формула для предела при $N \to \infty$ нормированных матриц-ковариаций векторов $(\beta_L - \beta)$ и $(\beta_M - \beta)$.

Ю. А. Розанов

11 В117. Об оценке функции распределения по реализации стационарного процесса. Слободенюк Н. П. «Тр. Всес. совещания по теории вероятностей и матем. статистика, 1958». Ереван, АН АрмССР, 1960, 88—95

Сообщается, что эмпирическая функция распределения

$$F_T(x) = \frac{1}{T} \int_0^T \psi_x [\xi(t)]\, dt,$$

где

$$\psi_x(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t < x, \\ 0 & \text{при } t \geqslant x, \end{cases}$$

$\xi(t)$ — стационарный в узком смысле процесс, при $T \to \infty$ сходится к одномерной функции распределения $F(x)$ процесса $\xi(t)$. От процесса $\xi(t)$ требуется, чтобы он мог быть представлен в виде

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} c(\tau - t)\, d\zeta(\tau),$$

$\xi(\tau)$—процесс с независимыми приращениями, $M d\zeta(\tau) \equiv 0$, $M |d\zeta(\tau)|^2 = d\tau$; $\int_{-\infty}^{\infty} \tau^4 |c(\tau)|^2 d\tau < \infty$ и, наконец, $\int_{-\infty}^{\infty} \tau^4 |c(\tau)|^2 d\tau < \infty$. Кроме того, предполагается, что $F(x)$ имеет ограниченную производную. Указывается, что критерии согласия, аналогичные критерию ω^2 и критерию Колмогорова, имеют предельные распределения, которые существенно зависят от конечномерных распределений процесса.

В. А. Маковский

11 В118. Критерий периодичности. Обобщение критерия Шустера на случай коррелированных временных последовательностей. Allais Maurice. Test de périodicité. Généralisation du test de Schuster du cas de séries temporelles autocorrélées. Comptes Rendus, 1957, 244, № 20, 2469—2471 (франц.)

Рассматривается вопрос о нахождении распределения периодограммы случайной (коррелированной) стационарной последовательности в случае отсутствия периодичностей. Приводятся нестрогие соображения о том, как можно получить приближенно это распределение.

В. Ф. Писаренко

11 В119. Об оценке среднего в стационарных процессах. Виленкин С. Я. «Теория вероятностей и ее применения», 1959, 4, № 4, 451—453 (рез. англ.)

Сравниваются оценки среднего в стационарном процессе вида

$$\frac{1}{T} \int_0^T \xi(t)\, dt \quad \text{и} \quad \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{N} \xi\left(\frac{kT}{N}\right)$$

и доказывается, что при некотором конечном N дисперсия второй оценки принимает минимальное значение и меньше дисперсии первой оценки.

А. В. Скороход

11 В120. Влияние теории стохастических процессов на статистику. Bartlett M. S. The impact of stochastic process theory on statistics, «Probability and statistics. Stockholm, Almqvist and Wiksell. New York, John Wiley and Sons», 1959, 39—49 (англ.)

Обзор вопросов статистики случайных процессов.

Р. Л. Добрушин

11 В121. Заметка о шумовом процессе. Nasr S. K. A note on a noise process. «Metrika», 1960, 3, № 1, 46—52 (англ.; рез. нем.)

Дифференциальное уравнение

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \varepsilon(t),$$

где $x(t)$ — r-мерный вектор, $\varepsilon(t)$ — r-мерный случайный процесс, A — квадратная матрица порядка r, сводится с помощью несложных выкладок к разностному

$$x(t+1) = Bx(t) + h(t),$$

где $B = e^A$, $h(t)$ — r-мерный случайный процесс. В конце статьи обсуждается вопрос об оценке элементов матрицы B по наблюдениям процесса $x(t)$.

О. Г. Журавлев

11 В122. Последовательное правило для бандита, имеющего два типа оружия. Vogel Walter. A sequential design for the two armed bandit. «Ann. Math. Statistics», 1960, 31, № 2, 430—443 (англ.)

Пусть результаты двух экспериментов X_{I} и X_{II} описываются двумя случайными величинами X и Y, причем $E(X) = p$, $E(Y) = q$. Экспериментатор, не зная p и q, проделывает n опытов. На каждом шаге он может выбрать X_{I} или X_{II}, причем выбор на k-м шаге зависит от соответствующих решений на предыдущих шагах и от результатов предыдущих экспериментов. Задача состоит в максимизации суммы всех выходных данных. Предполагается, что X и Y имеют двумерное нормальное распределение. Кроме того, считается, что в первые $2k$ шагов X_{I} и X_{II} выполняются по k раз. В оставшиеся $n - 2k$ шагов выполняется только X_{I} или X_{II}. Решение продолжать опыты с X_{I} или X_{II} принимаются с помощью последовательного правила Вальда. Поэтому k есть случайная величина, которую будем обозначать K. Первые $2k$ шагов описываются парами X_1, Y_1; X_2, Y_2; …; X_k, Y_k, причем все они предполагаются независимыми. После этого принятие решения зависит от $U_k = \sum_{l=1}^{k} (X_l - Y_l)$ и от целого $\alpha > 0$. Если $-\alpha < U_k < \alpha$, то наблюдается следующая пара; если $U_k \geqslant \alpha$ (или $U_k \leqslant -\alpha$), то используется только X_{I} (или X_{II}). Пусть K — случайное число наблюденных пар $(0 \leqslant K \leqslant n/r)$. α, μ $(n = 2\mu)$ и случайные величины U_k и K дают общую картину положения дела. Определим функцию потери $L_n = L(\alpha, p, q)$

$$L_n = n \max(p, q) - W,$$

где W — ожидаемая сумма после n шагов, которую можно привести к виду

$$W = (p+q) E(K) + p \frac{r^\alpha}{r^\alpha + s^\alpha} (n - 2E(K)) + q \frac{1}{r^\alpha + s^\alpha} (n - 2E(K)),$$

причем $r = p(1-q)$ и $s = q(1-p)$. Вместо L_n удобно рассматривать функцию

$$M_n = M(\alpha, \sigma, \tau) = \frac{n(\sigma - \tau)}{U^\alpha + 1} + \alpha \left(\frac{U^\alpha - 1}{U^\alpha + 1}\right)^2,$$

где $\sigma = \max(p, q)$, $\tau = \min(p, q)$ и $U = \sigma(1-\tau)/\tau(1-\sigma)$. Доказано, что:

I. Для $n \geqslant 4$

$$\min_{\alpha} \max_{\sigma,\tau} M(\alpha, \sigma, \tau) = \max_{\sigma,\tau} \min_{\alpha} M(\alpha, \sigma, \tau).$$

II. Если $\alpha_n = an^{1/2} + o(n^{1/2})$, где $(a = 0{,}292\ldots)$; $\sigma_n - \tau_n = mn^{-1/2} + o(n^{-1/2})$, где $m = 1{,}\varepsilon 9\ldots$, то σ_n, $\tau_n \to 1/2$ и $U_n^{\alpha_n} \to 9{,}06\ldots$ В случае $n \to \infty$ полагаем

$$\alpha_n = an^{1/2} + o(n^{1/2}),\ a > 0,$$

$$\sigma_n - \tau_n = mn^{-1/2} + (n^{-1/2}),\ \sigma_n, \tau_n \to p,\ 0 < p < 1,$$

$$L_\infty = m(V^a + 1)^{-1} + m(V^a - 1)(V^a + 1)^{-1} E(T),$$

где

$$V = \exp\left(\frac{m}{p(1-q)}\right) \text{ и } E(T) = \int_{-a}^{a} \int_{0}^{1/2} f(x, t)\, dt dx$$

$$\left(f(x, t) = (4\pi p(1-p)t)^{-1/2} \times \right.$$

$$\left. \times \exp - \frac{2mx - m^2 t}{4p(1-p)} \sum_{s=-\infty}^{\infty} (-1)^s \exp - \frac{(x - 2as)^2}{4p(1-p)t}\right).$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1/2} L_n(\alpha_n, \sigma_n, \tau_n) = L_\infty(a, m, p).$$

Рассматриваются обобщения задачи на случаи других распределений X и Y. Е. П. Липатов

11 В123. Асимптотическая минимаксная теорема для задачи о бандите, имеющего два типа оружия. Vogel Walter. An asymptotic minimax theorem for the two armed bandit problem. «Ann. Math. Statistics», 1960, **31**, № 2, 444—451 (англ.)

Общую постановку задачи и обозначения см. реф. 11В122. Пусть Π_k безусловная вероятность выбрать X_1 на k-м шаге. Ожидаемое значение выполненного эксперимента на k-м шаге будет

$$\Pi_k p + (1 - \Pi_k) q = q - (q - p)\Pi_k$$

потеря $-(p - q)(1 - \Pi_k)$, если $p \geqslant q$ или $(q - p)\Pi_k$, если $q \leqslant p$; тогда потеря $L(p, q)$ для всей игры равна $(p - q)\sum_{k=1}^{n}(1 - \Pi_k)$ или $(q - p)\sum_{k=1}^{n}\Pi_k$. Доказывается, что

$$L(p, q) = \frac{\sigma - \tau}{2} \sum_{k=1}^{n} (1 - \Pi_k(\sigma, \tau)) + \Pi_k(\tau, \sigma)),$$

где $\sigma = \max(p, q)$ и $\tau = \min(p, q)$. Стратегия «природы» t состоит в выборе пары (p, q). Функция потери зависит как от t, так и от стратегии экспериментатора s. Для каждого n экспериментатор и «природа» должны выбрать стратегию. Пусть $S = \{s_n\}$ — последовательность стратегий экспериментатора и $T = \{t_n\}$ — последовательность стратегий «природы». Определим $\{L_n = L(s_n, t_n)\}$ — последовательность функций потери. Пусть $l(S, T) = \inf\{\lambda / L_n = o(n^\lambda)\}$ — «слабая» функция проигрыша. Тогда

I. $\min_S \max_T l(S, T) = \max_T \min_S l(S, T) = 1/2.$

II. Пусть $T_0 = \{t_n^{(0)}\}$ — последовательность, определенная следующим образом:

$$|p_n - q_n| = mn^{-1/2} + o(n^{-1/2}),\ p_n, q_n \to p,$$

где $m > 0$ и $0 < p < 1$. Тогда для каждой последовательности S

$$\liminf_{n\to\infty} \left[L\left(s_n, t_n^{(0)}\right)/n^{1/2}\right] \geqslant C_1 > 0,$$

где C_1 — зависит от значений p и m.

III. Пусть $\{s_n^{(0)}\}$ — последовательность минимаксных стратегий (определение см. реф. 11В122). Для этих стратегий $\alpha_n = an^{1/2} + o(n^{1/2})$ имеет место для $a = 0{,}292\ldots$

Даются оценки сверху для

$$\liminf_{n\to\infty} (L(s_n, t_n) n^{-1/2}),\ \limsup_{n\to\infty} (L(s_n, t_n) n^{-1/2})$$

для некоторых важных последовательностей $\{s_n\}$ и $\{t_n\}$. Е. П. Липатов

11 В124. Последовательная оценка средней нормальной совокупности. Robbins Herbert. Sequential estimation of the mean of a normal population, «Probability and statistics. Stockholm, Almqvist and Wiksell, New York, John Wiley and Sons», 1959, 235—245 (англ.)

Рассматривается задача последовательной оценки среднего μ нормальной совокупности с неизвестной дисперсией σ^2, когда функция стоимости выборки объема n задается в виде:

$$L = A|\bar{x}_n - \mu| + n,$$

где $\bar{x}_n$ — выборочное среднее, выбираемое в качестве оценки. Автор рекомендует следующее правило: производить выбор до тех пор, пока

$$n < \left(\frac{AS_n}{\sqrt{2\pi}}\right)^{\frac{2}{3}},$$

где S_n — выборочное стандартное отклонение. Если σ известно, то это правило с S_n, замененным на σ, минимизирует среднюю стоимость выборки. В статье вычисляется средний ущерб, проистекающий из-за незнания σ в зависимости от $n_0 = \left(\frac{A\sigma}{2\pi}\right)^{\frac{2}{3}}$ для $\sqrt{2\pi}\, n_0 = 2, 4, 8, 16, 32, 64$. Кроме того, указывается незначительная модификация этого правила, заключающаяся в том, что процедуру выбора можно прекратить только на нечетном n. Для этого правила также приводятся числовые расчеты. И. Ф. Красичков

11 В125. Существенно полный класс двухступенных и последовательных правил для определения вероятности состояния. Дивеев Р. Х., «УзССР Фанлар Акад. ахбороти, Изв. АН УзССР. Сер. физ.-матем. н.», 1959, № 2, 14—25 (рез. узб.)

Пусть $x = (x_1, x_2, \ldots)$, где $x_k = 1$ или 0 с вероятностями соответственно q и $p = 1 - q$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Рассматриваются две конкурирующие гипотезы H_1 $(q \leqslant q_0)$ и H_2 $(q > q_0)$, число q_0 фиксировано. В работе рассмотрена процедура построения существенно полного класса решающих правил в пространстве решающих правил, согласно которым с вероятностью единица испытания проводятся не более чем в двух стадиях с фиксированным числом испытаний в первой стадии и с фиксированным или случайным числом испытаний во второй. Кроме того, рассматриваются правила, при которых общее число испытаний не превосходит некоторого фиксированного числа, и каждая стадия содержит одно наблюдение. Рассмотрение проводится для схем Бернулли и Пуассона, полученные результаты проиллюстрированы конкретными примерами. А. А. Зингер

11 В126. Общее введение в последовательный анализ. Rümke Chr. L. Een algemene inleiding tot de sequentie analyse. «Statist. neerl.», 1961, **15**, № 1, 47—54 (гол.)

Общее введение в последовательный анализ с кратким очерком классической теории проверки гипотезы.

Резюме автора

11 В127. Векторы, как аппарат в теории статистической регрессии. Corsten L. C. A. Vectors, a tool in statistical regression theory. «Meded. Landbouwhogeschool Wageningen», 1958, 58, № 1, 92 pp., ill. (англ., рез. гол.)

Излагаются различные случаи применения методов векторной алгебры для получения эффективных несмещенных оценок среднего и дисперсии различного рода выборок, а также для получения оценок коэффициентов линейной регрессии в весьма общих случаях. Этим путем автору удается дать наглядную геометрическую интерпретацию известным схемам математической статистики и в ряде случаев более коротким и наглядным путем прийти к окончательным результатам. Книга разбита на четыре главы.

В гл. 1 в весьма своеобразной форме излагаются необходимые основы линейной алгебры. Больше, чем обычно, уделяется внимания свойствам проекций. Приводится итерационный метод разложения вектора по компонентам из данного множества подпространств. В гл. 2 вводятся случайные векторы, их распределения. Рассматривая нормальные случайные векторы, автор показывает, например, что F-распределение можно интерпретировать, как распределение отношений квадратов длин проекций случайного вектора на два взаимно ортогональных подпространства. Отмечается, что несмещенные эффективные оценки среднего и дисперсии после выбора соответствующей метрики получаются при помощи ортогональных проекций. В гл. 3 рассматриваются различные проблемы регрессии для некоррелированных наблюдений, здесь же некоторое внимание уделяется линейной регрессии с ортогональными полиномами. Главное внимание, однако, уделяется регрессионным проблемам, связанным с классификациями наблюдений. Даются общие определения ортогональности классификаций. В связи с решением общей задачи регрессии с двумя и более классификациями применяется итерационный метод. Этот метод оказывается очень эффективным в применении к изучению сбалансированных и частично сбалансированных неполных блоков, двумерных решеток и латинских квадратов. Кроме этого, автор касается проблем, связанных с анализом ковариаций. В последней гл. 4 рассматриваются регрессионные задачи в случае коррелированных наблюдений. Приведен пример так называемого восстановления внутриблоковой информации в неполных блоках. Кроме этого, решается задача оценки общего эффекта обработки серии испытаний, в которых предполагается случайное влияние двух факторов. В. А. Маковский

11 В128 К. Формулы и таблицы математической статистики. Graf Ulrich, Henning Hans-Joachim. Formeln und Tabellen der mathematischen Statistik. Berlin-Göttingen-Heidelberg, Springer, 1958, VII, 104 S., 12.60 DM. Dtsch. Nationalbibliogr., 1958, A, № 44, 3220 (нем.)

Книга представляет собой справочник по математической статистике для инженеров, знакомых с методами математической статистики. В ней рассмотрены наиболее часто применяемые в технических приложениях формулы, распределения и методы математической статистики. Книга состоит из четырех разделов: A — Формулы, B — Примеры, C — Таблицы, D — Номограммы.

По рецензии из сборника «Новые книги за рубежом», 1960, № 3,

11 В129 К. Современная элементарная статистика. Freund John Ernst. Modern elementary statistics. 2nd ed. Englewood Cliffs, N. J. — London, Prentice — Hall Inc., 1960, x, 413 pp., ill., 60 sh. «Brit. Nat. Bibliogr.», 1961, № 581, 12 (англ.)

11 В130 К. Очерк статистики. Hays Samuel. An outline of statistics. 5th ed. London, Longmans, Green and Co., 1960, ix, 809 pp., ill., 14 sh. «Brit. Nat. Bibliogr.», 1960, № 568, 13 (англ.)

11 В131 К. Второй курс по статистике. Loveday Robert. A second course in statistics. London, Cambridge Univ. Press, 1961, xi, 155 pp., ill., 10 sh. «Brit. Nat. Bibliogr.», 1961, № 586, 14 (англ.)

11 В132 К. Вклады в теорию вероятностей и статистики; работы, представленные в честь Гарольда Хотеллинга. Eds Olkins Ingram, Ghurye Sudhish G., Hoeffding Wassily, Madow William G., Mann Henry B. Contributions to probability and statistics; essays in honor of Harold Hotelling. Stanford, Calif., Stanford Univ. Press; London, Oxford Univ. Press, 1960, x, 517 pp., ill., 52 sh. «Brit. Nat. Bibliogr.», 1960, № 568 (англ.)

См. также: 11 А58, 11А138—11А142, 11А192, 11А193, 11Б30, 11Б118, 11Б237, 11Б324, 11Б373, 11В41, 11В200, 11В263, 11В264, 11В305 К

ТЕОРИЯ ИГР, ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЭКОНОМИКА

Редактор *Н. Н. Воробьев*

11 В133. Совпадение и некоторые системы неравенств. Nikaido Hukukane. Coincidence and some systems of inequalities. «J. Math. Soc. Japan», 1959, 2, № 4, 354—373 (англ.)

Приводится теорема, обобщающая теоремы существования в теории игр и теории экономического равновесия. Пусть S и X — два хаусдорфова пространства, а φ — отображение S в семейство подмножеств X. φ называется полунепрерывным сверху, если для каждого $p \in S$ и каждой окрестности $U(\varphi(p))$ существует такая окрестность $V(p)$, что $\varphi(p) \subset U(\varphi(p))$ для любого $q \in V(p)$. Действительная однозначная функция $g(p)$ на S называется полунепрерывной снизу, если для каждого действительного λ множество $\{p : g(p) > \lambda\}$ открыто в S. Действительная функция $h(y)$ на выпуклом множестве Y называется квазивыпуклой, если $\{y : h(y) \leqslant \lambda\}$ — выпуклое подмножество в Y для любого действительного λ. Пусть, теперь, S и T — два компактных хаусдорфова пространства. Непрерывное отображение $f : S \to T$ называется отображением Вьеториса, если для каждого $q \in T$ все группы гомологий Вьеториса прообраза $f^{-1}(q)$ (которые изоморфны группам гомологий Чеха) тривиальны, т. е. $f^{-1}(q)$ ациклично.

Теорема 4. 1) Пусть S, X и $Y_i (i = 1, \ldots, m)$ — хаусдорфовы пространства, S компактно, а каждое Y_i — компактное выпуклое множество, в котором выпуклая линейная комбинация конечного числа точек непрерывно зависит от своих коэффициентов. 2) Для каждого $i = 1, \ldots, m$ существует действительная функция $h_i(x, y_i)$ на $X \times Y_i$, которая непрерывна на X для каждого фиксированного $y_i \in Y_i$ и квазивыпукла на Y_i для каждого фиксированного $k \in X$. 3) Существует отображение Вьеториса $f : S \to Y = Y_1 \times Y_2 \times \ldots \times Y_m$. 4) $\varphi : S \to 2^X$ есть полунепрерывное сверху отображение с множествами в качестве образов, в котором множества-образы $\varphi(p)$ компактны и ацикличны. 5) $g(p)$ есть полунепрерывная снизу действительная функция на S. 6) $\sum_{i=1}^{m} h_i(x, f_i(p)) \geqslant g(p)$ для любых p, x таких, что $x \in \varphi(p)$, где $f_i(p)$ обозначает проекцию $f(p)$ на Y_i. Если условия 1) — 6) выполнены, то существует точка $\bar{p} \in S$ такая, что соответствующий образ $\varphi(\bar{p})$ содержит

точку $\bar{x}$, для которой $\sum_{i=1}^{m} h_i(\bar{x}, y_i \geqslant g(p))^-$ для всех $y_i \in Y_i$ $(i = 1, \ldots, m)$. Обсуждается связь теоремы 4 с предыдущими работами по теории игр и теории экономического равновесия и дается некоторый вариант теоремы 4 для случая локально выпуклых линейных топологических пространств. С. И. Зуховицкий

11 В134. О расчлененных стратегиях. Воробьев Н. Н. «Теория вероятностей и ее применения», 1960, 5, № 4, 457—459 (рез. англ.)

Расчлененные стратегии в позиционной игре являются обобщением сигнальных стратегий Томпсона. Всякая смешанная стратегия игрока эквивалентна любой соответствующей ей расчлененной стратегии относительно произвольного семейства информационных множеств. Эта теорема обобщает теорему Томпсона о сигнальных стратегиях и тем самым теорему Куна о стратегиях поведения. Е. Б. Яновская

11 В135. Обобщенные квота-решения игр n лиц. Kalisch G. K. Generalized quota solutions of n-person games. «Ann. Math. Studies», 1959, **4**, № 40, 163—177 (англ.)

Продолжается работа Шепли (РЖМат, 1956, 4717К) по выделению обладающих специальными свойствами решений некооперативных игр n лиц с нулевой суммой. И. В. Романовский

11 В136. Множество разрешимых игр n лиц. Peleg Bezalel. On the set of solvable n-person games. «Bull. Amer. Math. Soc.», 1959, **65**, № 6, 380—383 (англ.)

Вводится понятие частичных игр с квотой, являющееся расширением понятия игр с квотой Шепли (РЖМат, 1956, 4717 К). Указывается класс частичных игр с квотой, имеющих решение. Оказывается, что множество таких игр имеет ту же размерность, что и множество всех игр. Для доказательства используется метод главы IX книги Неймана и Моргенштерна (Neuman J. von, Morgenstern O., Theory of games and economic behavior, Princeton Univ. Press, 1944, 2d ed., 1947). О. Н. Бондарева

11 В137. Деловые игры в бизнесе. Watkins H. R. Business games in business. «Operat. Res. Quart.», 1959, **10**, № 4, 228—244 (англ.)

В курс обучения деловым операциям предлагается ввести «деловые игры» (см. также Andlinger G. R., Harv. Busin. Rev., 1958, **36**, № 2). Дается описание такого способа обучения и сравнение его с обычным способом. Е. П. Липатов

11 В138. Ранги и стохастические ранги матриц. Dulmage A. L., Mendelsohn N. S. The term and stochastic ranks of a matrix. «Canad. J. Math.», 1959, **11**, № 2, 269—279 (англ.)

Под дважды стохастической матрицей понимается матрица с целыми неотрицательными элементами, сумма которых по строкам и столбцам постоянна и равна T. Матрица B называется «(r, T) дважды стохастическим расширением» $n \times n$-матрицы A, если: 1) она является дважды стохастической и 2) образована присоединением к матрице A r строк и r столбцов. Описываются все такие расширения и даются необходимые и достаточные условия для того, чтобы матрица B была крайней матрицей выпуклого множества всех (r, T) дважды стохастических расширений A. Для квадратной матрицы с неотрицательными членами вводится понятие стохастического ранга. Получены некоторые результаты, касающиеся связи ранга и стохастического ранга матрицы. Проблема нахождения всех дважды стохастических расширений матрицы A формулируется как задача линейного программирования. Е. Б. Яновская

11 В139. Лекции по линейному программированию. Креко Б., В сб. «Применение матем. в экон. исслед.» М., Соцэкгиз, 1959, 400—436

Элементарное введение в линейное программирование, состоящее из восьми лекций. В лекции 1 на простом примере дано понятие о задачах линейного программирования; в лекции 2 описан графический метод. Лекции 3—7 посвящены симплекс-методу (рассмотрены, в частности, случаи вырождения, дополнительные ограничения на переменные и случай неединственности оптимального решения). В лекции 8 описан модифицированный распределительный метод для решения транспортных задач. Все изложение ведется на простых примерах. Имеются опечатки и неточности в переводе. А. А. Корбут

11 В140. Новый алгорифм для решения задач линейного программирования: принцип разложения Данцига и Вулфа. Abadie J. Un nouvel algorithme pour les programmes linéaires: le principe de decomposition de Dantzig et Wolfe. «Rev. franç. rech. opérat.», 1960, **4**, № 15, 93—115 (франц.)

Изящное математическое изложение симплекс-метода Данцига и метода разложения Данцига и Вулфа (реф. 11В141). Намечены пути применения последнего к задачам линейного программирования с матрицами различной структуры (блочно-диагональные и др.). Отмечается приложимость метода к задачам выпуклого программирования. Библ. 14 назв. А. А. Корбут

11 В141. Принцип разложения для задач линейного программирования. Dantzig George B., Wolfe Philip. Decomposition principle for linear programs. «Operat. Res.», 1960, **8**, № 1, 101—111 (англ.)

Описывается метод «разложения» задачи линейного программирования, позволяющий свести решение задачи к решению ряда малых задач и «координирующей программы». Задача рассматривается в следующем виде: найти векторы $\mathbf{X} \geqslant 0$, $\mathbf{Y} \geqslant 0$ и максимальный скаляр x_0, удовлетворяющие условиям

$$\mathbf{P}_0 x_0 + \bar{\mathbf{A}}_1 \mathbf{X} + \bar{\mathbf{A}}_2 \mathbf{Y} = \bar{\mathbf{b}}, \qquad (1)$$

$$\mathbf{A}_1 \mathbf{X} = \mathbf{b}_1 \quad (L), \quad \mathbf{A}_2 \mathbf{Y} = \mathbf{b}_2 \quad (L').$$

Здесь $\mathbf{A}_i$, $\bar{\mathbf{A}}_i$ — матрицы, $\mathbf{P}_0$, $\mathbf{b}_i$, $\bar{\mathbf{b}}$ — векторы. Определим $\mathbf{S} = \bar{\mathbf{A}}_1 \mathbf{X}$, где $\mathbf{X} \geqslant 0$ и $\mathbf{A}_1 \mathbf{X} = \mathbf{b}_1$; $\mathbf{T} = \bar{\mathbf{A}}_2 \mathbf{Y}$, где $\mathbf{Y} \geqslant 0$ и $\mathbf{A}_2 \mathbf{Y} = \mathbf{b}_2$. Пусть имеется допустимое решение $\mathbf{X}_0$, $\mathbf{Y}_0$, x_0^0. Положим $\mathbf{S}_0 = \bar{\mathbf{A}}_1 \mathbf{X}_0$, $\mathbf{T}_0 = \bar{\mathbf{A}}_2 \mathbf{Y}_0$. Тогда $\mathbf{P}_0 x_0^0 + \mathbf{S}_0 + \mathbf{T}_0 = \mathbf{b}$. Пусть $\mathbf{S}_0$ представлено в виде

$$\mathbf{S}_0 = \bar{\lambda}_1 \mathbf{S}_1 + \ldots + \bar{\lambda}_k \mathbf{S}_k, \quad \bar{\lambda}_l \geqslant 0, \quad \delta_1 \bar{\lambda}_1 + \ldots + \delta_k \bar{\lambda}_k = 1.$$

Здесь $\mathbf{S}_l = \bar{\mathbf{A}}_1 \mathbf{X}_l$, где $\mathbf{X}_l \geqslant 0$ есть либо экстремальное решение системы (L), либо решение соответствующей ей однородной системы, а $\delta_l = 1$ в первом случае и 0 во втором. Аналогично определяются $\bar{\mu}_1, \ldots, \bar{\mu}_l$. Теперь (1) можно заменить на координирующую программу: найти максимальное x_0 и $\lambda_l \geqslant 0$, $\mu_l \geqslant 0$, удовлетворяющие

$$\mathbf{P}_0 x_0 + \lambda_0 \mathbf{S} + \lambda_1 \mathbf{S}_1 + \ldots + \lambda_k \mathbf{S}_k + \mu_0 \mathbf{T} + \mu_1 \mathbf{T}_1 + \ldots + \mu_l \mathbf{T}_l = \mathbf{b}$$

при условиях

$$\delta_0 \lambda_0 + \ldots + \delta_k \lambda_k = 1, \quad \delta' \mu_0 + \ldots + \delta'_l \mu_l = 1,$$

где $\mathbf{S}$ и $\mathbf{T}$ соответствуют произвольным экстремальным решениям системы (1) $(\delta_0, \delta'_0 = 1)$ или решениям соответствующей однородной системы $(\delta_0, \delta'_0 = 0)$. Предполагается также, что столбцы $\mathbf{T}_l$, $\mathbf{S}_l$, $\mathbf{P}_0$ образуют базис, которому отвечают симплексные множители π, $-s$, $-t$. Находим $\gamma_1 = \pi \bar{\mathbf{A}}_1$, $\gamma_2 = \pi \bar{\mathbf{A}}_2$. Решение $(\mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0, x_0^0)$ оказывается максимальным, если для $\mathbf{A}_1 \mathbf{X} = \mathbf{b}$, $\gamma_1 \mathbf{X} = z_1$, $\mathbf{A}_2 \mathbf{Y} = \mathbf{b}_2$, $\gamma_2 \mathbf{Y} = z_2$ будет $\min z_1 = s$, $\min z_2 = t$. Если решение не оптимально, то можно найти $\mathbf{S}^*$, которое следует ввести в базис координирующей программы

(удалив некоторое S_i или T_i), и найти новые множители, которые дадут новые значения $\gamma_1, \gamma_2, z_1, z_2$. Этот процесс конечен. Нахождение оптимального решения исходной задачи весьма просто. Приводятся примеры приложения изложенных идей к блочно-диагональным и динамическим задачам линейного программирования; обсуждается экономический смысл этого метода в задачах теории фирм. А. А. Корбут

11 В142. Метод дифференциальных рент Лурье для определения плана оптимальных перевозок. Брудно А. Л. «Докл. АН СССР», 1960, **131**, № 6, 1238—1241

Дается описание алгорифма метода дифференциальных рент А. Л. Лурье (Александров А. В., Лурье А. Л., Олейник Ю. А., Автомобильный транспорт, 1959, № 6) для решения транспортной задачи в матричной постановке. С. С. Кислицын

11 В143. Средства для установления политики цен и режима производства предприятия, имеющего портфель заказов. Beascoechea José María. Elementos para establecer una política de precios y el régimen de producción de una empresa con cartera de pedidos. «Dyna», 1960, **35**, № 7, 516—518 (исп.)

Элементарная задача из области линейного программирования.

11 В144. Строение базисов в транспортных задачах. Simonnard M. Structure des bases dans les problèmes de transport. «Rev. franç. rech. opérat.», 1959, **3**, № 12, 130—136 (франц.)

Изящное изложение двух известных методов решения транспортной задачи в терминах теории графов. Особое внимание уделяется геометрической характеристике базисных решений. Показано также, что первое приближение, построенное по методу Хаутэккера (Houthakker H. S., Operat. Res., 1955, **3**, № 2), является базисным. А. А. Корбут

11 В145. Сокращенные вычисления в транспортной задаче. Мидзуно. «Опэрэсендзу рисати. Operat. Res. Manag. Sci.», 1956, **1**, № 1, 52—55 (японск.)

Численный (итеративный) метод решения транспортной задачи основан на методе, предложенном Хаутэккером (Houthakker H. S., Operat. Res., 1955, **3**, № 2). Имеется числовой пример. Гу Цзи-фа

11 В146. Функциональные уравнения и последовательные приближения в линейном и нелинейном программировании. Bellman Richard. Functional equations and successive approximations in linear and nonlinear programming. «Naval Res. Logist. Quart.», 1960, **7**, № 1, 63—83 (англ.)

Иллюстрируется применение двух основных методов классического анализа, функциональных уравнений и последовательных приближений к решению различных классов многомерных задач о максимизации. А. С. Гриценко

11 В147. Решение задачи об оптимальной профилактической выборке методами динамического программирования. Kalaba Robert. Optimum preventative sampling via dynamic programming. «Operat. Res.», 1958, **6**, № 3, 439—440 (англ.)

Рассматривается задача (поставленная П. Уиттлом, Whittle P., Operat. Res., 1954, **2**, 197 — 203) о проведении выборки из некоторой совокупности с целью предотвратить возникновение дефектных объектов. Ясно, что чем крупнее выборка, тем больше эффект «запугивания» для потенциального нарушителя. Математическая модель задачи: A объектов разбиты на N классов по a_i объектов в каждом. Каждый представитель i-го класса имеет стоимость v_i, а вероятность того, что он окажется дефектным, равна p_i. Найти долю f_i представителей i-го класса, которую нужно обследовать, чтобы минимизировать математическое ожидание V суммарной стоимости необнаруженных дефектных объектов. В целом нужно обследовать долю F от A объектов. Задача сводится к нахождению f_i, минимизирующих $V = \sum_1^N a_i v_i g_i(f_i)$ при условиях

$$\sum_1^N a_i f_i = AF,\ 0 \leqslant f_i = k/a_i\ (k = 0, 1, \ldots, a_i),$$

где

$$g_i = (1 - f_i)\, p_i(f_i).$$

Отмечаются трудности, возникающие при решении этой задачи методом множителей Лагранжа. Составлено уравнение динамического программирования для этой задачи:

$$V_{k+1}(FA) = \min_{f_{k+1}} [a_{k+1} v_{k+1} g_{k+1}(f_{k+1}) + V_k(FA - a_{k+1} f_{k+1})].$$

Обсуждены некоторые связанные с этим уравнением вычислительные вопросы. А. А. Корбут

11 В148. Существование решения системы уравнений Вальраса, описывающей образование капитала и кредит. Morishima Michio. Existence of solution to the Walrasian system of capital formation and credit. «Z. Nationalökon.», 1960, 20, № 1—2, 238—243 (англ.)

В рассматриваемой экономической модели имеется l потребляемых товаров, m производственных факторов и n товаров, выступающих в роли капитала. Модель описывается векторами x (спрос на потребляемые товары), p (их цена), r (предложение факторов), w (их цена), s (предложение услуг капитала), v (их цена). Модифицированная по сравнению с исходной формулировкой Вальраса система, описывающая образование капитала и кредит, может быть представлена в виде

$$px + qy = wr + vs,\quad Ax + Bz \leqslant r,\quad Cx + Dz \leqslant s,$$
$$quz \leqslant qy,\quad wA + vC \geqslant p,\quad wB + vD \geqslant qu,$$

где каждое из x, r, s, y — функция от p, q, w, v. Здесь y пропорционально размеру процента на капитал q, а матрицы A, B, C, D описывают соответственно расход факторов на единицу потребляемого товара и на единицу товара, выступающего в роли капитала, и расход услуг капитала на те же величины. При некоторых естественных в экономическом отношении предположениях доказано, что указанная система имеет экономически осмысленное решение. Доказательство использует теорему Брауэра о неподвижной точке. Библ. 12 назв. А. А. Корбут

11 В149. Рыночный спрос на товары длительного пользования (Замечание). Nerlove Marc. The market demand for durable goods: a comment. «Econometrica», 1960, 28, № 1, 132—142 (англ.)

Предлагаются два новых варианта для вида функции спроса на запас в модели спроса Стоуна-Роу (Stone R., Row D. A., Econometrica, 1957, July, **25**, 423—443; Economic J., 1958, June **68**, 256—270). С. С. Кислицын

11 В150. Кривая спроса на предметы роскоши. Beckmann Martin J. A demand cirve for luxuries. «Trabajos Estadíst.», 1957, 8, 23—27 (англ., рез. исп.)

Рассмотрим товар, по крайней мере одна единица которого может быть куплена каким-либо индивидуумом в течение некоторого единичного интервала времени и который имеет n сортов с ценами $p_1 < p_2 < \ldots < p_n$. Предположим, что существует неотрицательный случайный вектор $t = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$ «порогов» такой, что индивидуум с доходом y получает сорт k всякий раз, когда

$$t_k \leqslant y - p_k,\ t_{k+j} > y - p_{k+j}\ (j = 1, \ldots, n - k).$$

Пусть $f(t)$ — плотность вероятности t и $g(y)$ — частотная плотность дохода, а спрос всех индивидуумов на

сорт k зависит только от $p_k,\ldots,p_n$ и равен

$$D_k(p_k,\ldots,p_n)=\int_{y-p_n}^{\infty}\ldots\int_{y-p_{k+1}}^{\infty}\int_{0}^{y-p_k}\ldots$$

$$\ldots\int_0^\infty\int_0^\infty g(y)\,f(t)\,dt_1,\ldots,dt_n.$$

Тогда общий спрос на высший сорт может быть аппроксимирован так: $D_n(p_n)\simeq c_1-c_2\exp\{ap_n\}$ $(a>0)$ при следующих дополнительных предположениях: 1) высший сорт может быть куплен только тогда, когда доход превышает определенный уровень $q\gg p_n$, и для таких высоких доходов $g(y)$ пропорциональна y^{-h}, $h>1$ («закон Парето»); 2) функция распределения t_n является экспоненциальной $P(t_n\leqslant x)=1-b\exp\{-a(y-p_n)\}$. В работе даются ссылки на ранее полученные результаты, из которых самые новые принадлежат Айтчисону и Брауну (Aitchison J., Brown J. A. C., Rev. Econ. Studies, 19 4—55, 22, 35—46), Фаррелу (Farrel M. J., J. Roy. Statist. Soc., 1954, 117, Ser. A, 171—201), Джорджеску-Регену (Georgescu-Roegen N., Quart. J. Econ., 1954, 68, 503—534). J. Marschak.

Перевод из Math. Revs, 1958, 19, № 4.

11 В151. Очерк по патологии азартных игр. Quandt Richard E. A contribution to the pathology of gambling. «Z. Nationalökon.», 1960, 20, № 1—2, 19—29 (англ.)

Замечания по поводу аксиоматики полезности, данной фон Нейманом и Моргенштерном, имеющие целью учесть отношение индивидуума к азартной игре и выяснить его рациональное поведение. Предлагается иная система аксиом и рассматривается вопрос о существовании и единственности индекса полезности в этой системе. Рассмотрение ведется в терминах лотерей; исследуются некоторые их свойства, в частности составные лотереи. В заключение показаны возможные нарушения некоторых аксиом фон Неймана и Моргенштерна для индивидуумов, склонных к азартности или чуждых ей. А. А. Корбут

11 В152. Заметка о теории распределения Менгера—Вилсера. Uzawa Hirofumi. A note on the Menger — Wieser theory of imputation. «Z. Nationalökon.», 18, № 3, 318—334 (англ.)

Рассматривается следующая задача: n видов товара производятся из r видов продукции. При затрате работы $x=(x_1,x_2,\ldots,x_m)$ производится $f_i(x)$, $i=1,2,\ldots,n$, товара i и затрачивается $g_k(x)$, $k=1,\ldots,r$, продукта k. Ищется такое x, которое максимизирует

$$f(x)=\sum_{i=1}^n p_i f_i(x)$$

при $x=(x_1,\ldots,x_m)$, $x_j\geqslant 0$, $j=1,2,\ldots,m$,

$$g_k\leqslant v_k,\ k=1,2,\ldots,r.$$

Предполагается выполнение следующих условий: 1) $f_i(x)$ — вогнутая дифференцируемая функция, 2) $g_k(x)$ — выпуклая дифференцируемая функция, 3) существует $\bar{x}$ такой, что $g_i(\bar{x})<v_i$. При этих условиях доказывается обобщение теоремы Найта—Самуэльсона о связи между «shadow cost» и «opportunitu cost». Рассматриваются различные частные случаи этой задачи. О. Н. Бондарева

11 В153. Статистическая модель «трения» в экономике. Rosett Richard N. A statistical model of friction in economics. «Econometrica», 1959, 27, № 2, 263—267 (англ.)

«Трением» (the friction) в зарубежной экономической литературе называется такое явление, когда функция (имеющая экономический смысл) в некоторой области задания аргумента нечувствительна к его изменениям. В статье речь идет о случайной величине W, определяемой следующим образом:

$$W=\begin{cases}Y_1-u, & \text{если } Y_1-u<L,\\ L, & \text{если } Y_1-u>L, \text{ а } Y_2-u<L,\\ Y_2-u, & \text{если } Y_2-u>L,\end{cases}$$

где u — случайная величина, распределенная по закону

$$N(0,\sigma);\ Y_1=\beta_0'+\sum_{i=1}^m\beta_iX_i;\ Y_2=\beta_0''+\sum_{i=1}^m\beta_iX_i$$

$(\beta_0', \beta_0'', \beta_i$ — неизвестные параметры, $\beta_0'>\beta_0'')$. Задача состоит в оценке σ, β_0', β_0'', β_i по наблюденным значениям W. Рекомендуется применять метод максимального правдоподобия, используя для решения получающейся системы уравнений итерационный метод подобно тому, как это сделано в статье Тобина (Tobin J., Econometrica, 1958, 26, № 1). С. С. Кислицын

11 В154. Экономическая модель Вердорна. Долгосрочное планирование. Thionet P. Un modèle économétrique. La projection à long terme de Verdoorn. «Publs Inst. statist. Univ. Paris», 1959, 8, № 3, 233—246 (франц.)

Разбор и пояснения модели планирования на 20 лет (с 1950 по 1970 г.), предложенной Вердорном (Verdoorn P. J., Econometrica, 1956, Oct., 429—450) для Голландии. Э. А. Меркулова

11 В155. Некоторые задачи производственного планирования. Klein Morton. Some production planning problems. «Naval Res. Logist. Quart.», 1957, 4, № 4, 269—286 (англ.)

Рассматривается задача о минимизации $\sum_{i=1}^n f_i(x_i)$ при ограничениях: $\sum_{i=1}^n x_i=S$; $0\leqslant x_i\leqslant c_i$ $(i=1,\ldots,n)$.

Автор указывает на ряд возможных экономических интерпретаций этой задачи. Опишем одну из них. К концу n-го периода нужно изготовить S единиц продукции. Производственная мощность в i-й период равна c_i, а стоимость производства x_i единиц продукции $f_i(x_i)$. Требуется составить такой план производства, при котором суммарные издержки минимальны. Решение задачи получено для случаев, когда функции f_i либо все выпуклы, либо все вогнуты (для последнего случая решение неполное). Аналогичные результаты имеются для более общей задачи, где добавляются ограничения

$$\sum_{j=1}^i x_j\geqslant S_i\ (i=1,2,\ldots,n-1).$$

С. С. Кислицын

11 В156. Изучение максимальной пропускной способности двухколейной железной дороги в случае наличия поездов, имеющих право на первоочередность. Mathys G., Ricard M. Etude du debit maximum en marches R. O. directes entre deux triages d'une section de double voie non banalisée; siège d'un trafic prioritaire. «Rev. franç. rech. opérat.», 1960, 4, № 15, 117—146 (франц.)

Рассматривается задача составления оптимального расписания для товарных поездов, если должны быть оставлены «окна» для пассажирских поездов. Метод решения в основном графический. С. С. Кислицын

11 В157. Проектирование линий электропередачи с использованием методов линейного программирования. Knight U. G. W. The logical design of electrical networks using linear programming methods. «Proc. Instn. Electr. Engrs», 1960, A 107, № 33, 306—314. Discuss., 314—319 (англ.)

Показано, что задача оптимального соединения нескольких потребителей электроэнергии и нескольких

источников в общую энергосистему сводится к задаче линейного программирования. Подробно рассматривается случай, когда минимизируется стоимость системы. Кратко рассмотрены два других критерия качества: минимальная длина линий и минимальная величина произведения реактивной мощности на расстояние. Рассматривается объем вычислительной работы при использовании симплексного метода или его модификаций.
М. Д. Хахин

11 В158. Вычислительные методы определения оборудования. Мураками. «Опэрэсёндзу рисати», Operat. Res. Manag. Sci., 1956, **1**, № 4, 187—192 (японск.)

11 В159. Расписание с линиями потерь и функциями убытка. McNaughton Robert. Scheduling with deadlines and loss functions. «Manag. Sci.», 1959, **6**, № 1, 1—12 (англ.)

Требуется обработать m изделий. Время обработки i-го изделия равно a_i. Имеется срок d_i такой, что при условии окончания обработки i-го изделия в момент t убыток будет равен $\max[0, p_i(t-d_i)]$. Величины d_i носят наименование линий потерь (the deadlines). Основные результаты статьи:

Теорема 2. 4. Имеется один станок. Если все работы выполняются непосредственно друг за другом в порядке уменьшения a_i/p_i, причем ни одна из них не заканчивается ранее соответствующего ей срока d_i, то расписание имеет минимальный убыток.

Теорема 3. 1. Имеется n одинаковых станков. Условиями, необходимыми и достаточными для окончания всех работ к моменту $s \geqslant (1/n)\sum_{i=1}^{m} a_i$, являются неравенства $a_i \leqslant s$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$.

Теорема 4. 1. Имеется n однотипных станков; $d_1 = d_2 = \ldots = d_m = 0$. Тогда для любого расписания с конечным числом расщеплений работ по различным станкам можно указать расписание с небольшим убытком, но без расщеплений.

В заключение находится оптимальное расписание для случая $m = 3$, $n = 2$ (станки разных типов).
С. С. Кислицын

11 В160. К вопросу о моделировании. Simond M., Rosentiehl P. Tour d'horizon sur la simulation. «Trav. et méthodes», 1960, № 141, 67—73 (франц.)

Рассматривается методология метода моделирования, который применяется при анализе сложных динамических систем. Основными трудностями при изучении управления системами являются: 1) взаимосвязь различных частей систем, 2) согласованность решений, которые нужно принять, 3) события, которые должны произойти в будущем, предполагаются случайными. Указывается конкретная модель управления заводом.
Е. Б. Яновская

11 В161. Динамическое программирование и задачи управления запасами. Sasieni Maurice. Dynamic programming and inventory problems. «Operat. Res. Quart.», 1960, **11**, № 1—2, 41—49 (англ.)

Дано общее понятие о многошаговых процессах решения и сформулирован принцип оптимальности. В качестве иллюстрации рассмотрено применение методов динамического программирования к задачам управления запасами в случае конечношагового и бесконечношагового процессов. Обсуждены поведения типа (S, s) (см., например, РЖМат, 1960, 2054, 2055) и некоторые вычислительные вопросы. Приведен простой пример.
А. А. Корбут

11 В162. Рекуррентные методы в задачах обновления запасов. Barbut Marc. Méthodes recurrentes dans les problèmes de renouvellement de stock. «Cahiers Bur. univ. rech. operat.», 1957, № 2, 11—26 (франц.)

Задача управления запасами при случайном будущем спросе исследуется методами динамического программирования. Весьма подробно изучен вопрос о выборе моментов для производства заказов с целью пополнения запаса, если запаздывания в выполнении этих заказов — случайные величины.
А. А. Корбут

11 В163. Определение оптимального допустимого размера отбраковки. Giffler Bernard Determining an optimum reject allowance. «Naval Res. Logist. Quart.», 1960, **7**, № 2, 201—206 (англ.)

При потребности в n единиц продукта производится заказ $n + a$ единиц ввиду их возможного выхода из строя (или отбраковки), который происходит с вероятностью p. Заказ каждой лишней единицы (из числа a единиц) дает экономию φ (за счет ненужности повторного заказа в случае отбраковки). Однако если отбраковки не происходит, то издержки на единицу излишне заказанного продукта равны μ. Суммарная ожидаемая экономия процесса равна $r(a) = \varphi p\,(0 \leqslant i \leqslant a;\ n + a) - \mu \sum_{i=0}^{a} (a - i)\, p\,(i;\ n + a)$, и задача заключается в нахождении a^*, максимизирующего $r(a)$. Дается метод решения этой задачи и приводятся два примера (биномиальное и пуассоновское распределение вероятности отбраковки).
А. А. Корбут

11 В164 К. Применение математики в экономических исследованиях. Ред. Немчинов В. С., М., Соцэкгиз, 1959, 486 стр. илл., 14 р. 20 к.

11 В165 К. Линейные неравенства и смежные вопросы. Сб. статей. Ред. Кун Г. У., Таккер А. У. Перев. с англ. Прилож.: Теория игр и линейное программирование. С. Вайд, М., Изд-во ин. лит., 1959, 469 стр., илл., 21 р. 20 к.

Реферировано постатейно.

11 В166 К. Монетарная и фискальная политика в неопределенных условиях. Faxén Karl-Olof. Monetary and fiscal policy under uncertainty. Stockholm, Almqvist & Wiksell, 1957, 212 pp., ill. (англ.)

Целью работы является выработка аппарата для анализа взаимосвязи между монетарной и фискальной политиками правительства. Книга состоит из семи глав. Гл. I. Введение. Описан аналитический аппарат и указаны модели децентрализованного рынка. Гл. II. О задачах стокгольмской школы. Построены две модели для анализа изменения цен и количества товаров на рынке. Исследуется монетарная и фискальная политика в условиях полного предвидения. Гл. III. Деревья разбиений и стратегий. Анализируются экономические модели, в которые введены понятия риска и неопределенности. Гл. IV. Макро-модели. Изучается поведение правительственных и деловых фирм. Гл. V. Анализ планирования предпринимателями. Гл. VI. Политика заработной платы. В гл. VII подведены итоги. В конце каждой главы имеется библиография (всего 120 назв.). Л. И. Горьков

11 В167. Математические методы организации и планирования производства. Kantorovich L. V. Mathematical methods of organizing and planning production. «Manag. Sci.», 1960, **6**, № 4, 366—422 (англ.)

Перевод известной книги Л. В. Канторовича, изданной в 1939 г. Ленинградским университетом и воспроизведенной с небольшими изменениями в сборнике (реф. 11 В164 К). В этой работе были, по существу, изложены уже все основные методы линейного программирования.
Л. И. Горьков

11 В168. Системы линейных соотношений Good R. A. System of linear relations. «SIAM Rev.», 1959, **1**, № 1, 1—31 (англ.)

Конспект лекций А. У. Таккера, прочитанных летом 1957 г. Содержание их в основном совпадает с содержанием первых четырех статей сборника «Линейные неравенства» (реф. 11 В165 К). Основным предметом изучения является теория систем линейных неравенств и теория двойственности. Особое внимание уделяется геометрической интерпретации полученных результатов и их применению в теории линейного программирования и матричных игр. Библ. 16 назв.
А. А. Корбут

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕТИКО-ВЕРОЯТНОСТНЫХ И СТАТИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ

Редактор *Р. Л. Добрушин*

11 В169. Некоторые новые стохастические процессы и их применения. Maravall Casesnoves Darío Algunos nuevos procesos estocásticos y sus aplicaciones. «Rev. Real acad. cienc. exact. fís. y natur. Madrid», 1959, 53, № 4, 659—726 (исп.)

Статья является продолжением одноименной работы автора (РЖМат, 1961, 8В161). В § 12 вычислено распределение вероятностей для проекции на координатную ось n-мерного радиуса-вектора точки, находящейся в броуновском движении. В § 13 рассмотрено одновременное протекание двух случайных независимых процессов: случайное блуждание в n-мерном пространстве и радиоактивный распад некоторого тела. Количество распавшихся за время $(0, t)$ атомов распределено по закону Пуассона. Вычислено распределение вероятностей для положения блуждающей частицы в тот момент времени, когда распался m-й атом. В § 14 вычислено распределение вероятностей для длины изотропного случайного n-мерного вектора, проекция которого на ось имеет устойчивый закон распределения. В § 15 рассмотрена эпидемия с начальным случайным числом больных. Задан закон заражения. Выясняется, как определить параметры этого закона по экспериментальным данным. Найдено совместное распределение вероятностей числа больных в начальный момент и в момент t. Исследован случай $t \to \infty$. В § 16 вычислено распределение вероятностей для длины вектора $\mathbf{r}_j = \sum_{k=1}^{j} \mathbf{a}_k$ $(j = 1, \ldots, n)$, где $|\mathbf{a}_k| = a_k$ (неслучайная величина), а угол между $\mathbf{r}_j$ и $\mathbf{a}_{j+1}$ имеет равномерное распределение вероятностей на отрезке $(0, 2\pi)$. Найдены также моменты $|\mathbf{r}_n|$ и проекции $\mathbf{r}_n$ на координатную ось. В § 17 решается задача: в урне 0 Np_1 шаров обладает свойством a_1 и $N(1-p_1)$— не обладает этим свойством. В выборке с возвращением объема N из этой урны N_1 шар обладает свойством a_1. Тогда в урну I опускаем $N_1\rho_2$ шаров со свойством a_2 и $N_1(1-p_2)$ без этого свойства. Аналогично строим урну II, исходя из урны I, и т. д. Вычисляются моменты (до четвертого включительно) случайной величины N_l. В § 18 выведено дифференциальное уравнение для распределения вероятностей процесса $\xi(t)$, определенного аналогично диффузионному с добавлением того требования, чтобы $\xi(t)$ был монотонным. Уравнение решено в некоторых частных случаях. В §§ 19—20 анализируется движение маятника, на который в случайные моменты времени действуют единичные импульсы. В § 21 вычислено распределение вероятностей для произведения двух произвольных гауссовских случайных величин. В § 22 рассмотрено несколько примеров случайных величин, могущих с положительной вероятностью равняться ∞. В последнем параграфе разобрана задача о «бросании» иглы в n-мерном пространстве, разделенном параллельными равноотстоящими друг от друга гиперплоскостями. Вычислена вероятность пересечения иглой гиперплоскости. Р. Ф. Матвеев

11 В170. Новые теоремы о броуновском движении и случайных колебаниях. Maravall Casesnoves Darío. Nuevos teoremas sobre el movimiento browniano y las oscilaciones estocásticas. «Rev. mat. hisp.-amer.», 1959, 19, № 2, 51—66; № 3, 105—121 (исп.)

В первой части выводятся формулы для распределения произведения независимых случайных величин, проекции вектора на случайную ось, суммы случайного числа случайных величин. Приводится много примеров. Во второй части рассматривается движение маятника под действием случайных импульсов. Выводятся формулы для математического ожидания и дисперсии случайного положения маятника. В частности, рассматривается случай, когда импульсы поступают по закону Пуассона. В этом случае автор получает парадоксальный и неверный результат: получается, что случайное движение маятника сходится по вероятности к неслучайному движению. А. Д. Вентцель

11 В171. Стохастические методы решения интегро-дифференциальных уравнений с частными производными и их применение к нестационарным процессам Маркова. I. Yokota Toshio. Stochastic methods of solving partial integro-differential equations and their application to non-stationary Markoff process. I. «Ann. Inst. Statist. Math.», 1959, 10, № 2, 137—161 (англ.)

Статья представляет собой первую часть работы, посвященной обоснованию и обобщению интеграла Фейнмана, введенного им в статье «Пространственно-временное приближение к нерелятивистской квантовой механике». Автор рассматривает уравнение

$$\frac{\partial}{\partial s}\psi(x, s) = A(s)\psi(x, s), \qquad (1)$$

где $A(s)$ — оператор, зависящий от времени s, и строит в виде некоторых рядов его формальные фундаментальные решения, называемые им «упорядоченными экспонентами». Не задаваясь вопросом о сходимости рядов, автор выводит много формул, связывающих введенные им операторы, в частности, показывающие, как изменяется решение уравнения (1) при добавлении к $A(s)$ других операторов. А. Д. Вентцель

11 В172. Решение функционального дифференциального уравнения для кристалла в случае статистического равновесия. Lewis Robert M., Keller Joseph B. Solution of the functional differential equation for the statistical equilibrium of a crystal. «Phys. Rev.», 1961, 121, № 4, 1022—1037 (англ.)

Рассматривается классическая статистическая система N взаимодействующих частиц, функция распределения по координатам для которой имеет вид

$$D = e^{-\frac{U}{\theta}} \Big/ \int e^{-U/\theta}\, d\xi_1 \ldots d\xi_N,$$

где потенциальная энергия системы

$$U = \frac{1}{2}\sum_{ij}\rho(\xi_i - \xi_j) + \sum_i \beta(\xi_i)$$

имеет минимум при значениях координат частиц $\xi_1 \ldots \xi_N$ равных $I_1 \ldots I_N$. Температура $\theta = kT$ считается гораздо большей дебаевской (требование классичности системы), но гораздо меньшей температуры плавления. С помощью s-частичной функции распределения $\rho_s(\xi_1, \ldots, \xi_s) = \int D\, d\xi_{s+1} \ldots d\xi_N$, $s = 1, 2, \ldots, N$, определяются любые интересующие термодинамические величины

$$\overline{\psi} = \int \psi(\xi_1 \ldots \xi_s)\, \rho_s\, d\xi_1 \ldots d\xi_s,$$

однако вместо определения ρ_s вводится производящий функционал $J[\eta] = \int D \sum_{\nu=1}^{N} \eta(\xi_\nu)\, d\xi_1 \ldots d\xi_N$, так что

$$\rho_s(\xi_1 \ldots \xi_s) = \frac{(N-s)!}{N!} \frac{\delta^s J}{\delta\eta(\xi_1) \ldots \delta\eta(\xi_s)}\Big|_{\eta=1},$$

и для него составляется уравнение в вариационных производных, которое решается в виде разложения по степеням θ. При этом решение уравнения для $J[\eta]$ ищется в виде $J[\eta] = L \prod_{\nu=1}^{N} \eta(\gamma_\nu)\Big|_{\gamma_\nu = I_\nu}$, где $L = 1 + \sum_{\mu=1}^{\infty} \theta^{\mu} I_\mu$,

L_μ — дифференциальный оператор порядка 2μ. Для членов L с $\mu = 1$ и $\mu = 2$ получены общие выражения. С помощью оператора L довольно просто определяются средние термодинамические величины, например, для симметричной функции $\psi(\gamma_1 \dots \gamma_N)$ имеем

$$\overline{\psi} = [L\psi(\gamma_1 \dots \gamma_N)]_{\gamma_\nu = I_\nu}.$$

Полученные этим способом общие формулы для внутренней энергии, теплоемкости и давления использованы для получения температурных поправок к классическим результатам теории твердого тела, связанных с учетом ангармонических членов в энергии взаимодействия узлов решетки, роль которых становится существенной с ростом θ. И. А. Красников

11 В173. Статистическая механика релятивистских потоков. I. Watson K. M., Bludman S. A., Rosenbluth M. N. Statistical mechanics of relativistic streams. I. «Phys. Fluids», 1960, **3**, № 5, 741—747 (англ.)

Рассматривается прохождение пучка релятивистских частиц через плазму, содержащую как заряженные, так и нейтральные частицы. Плотность частиц в пучке предполагается малой, так что коллективные взаимодействия превалируют над рассеянием частиц; при этом гидродинамическое описание пучка незаконно, и используется уравнение переноса Больцмана

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla\rho + F\nabla_p\rho = C,$$

где ρ — плотность в фазовом пространстве частицы $(\mathbf{x}, \mathbf{p})$; $\mathbf{v}$ — скорость, F — действующая на частицу сила (электромагнитная). Допускается, что характерный масштаб времени для сил, создающих дисперсию скоростей частиц в пучке, мал по сравнению со временем изменений средней энергии пучка, так что существует некоторое квазиустановившееся состояние пучка. Для этого состояния находится релятивистское максвеллово распределение частиц. Далее рассматриваются малые отклонения от квазиустановившегося состояния, которые описываются с помощью линеаризированного уравнения переноса. Устанавливаются приближенные критерии для возможности пренебрежения статическими полями. Как частный случай, рассматривается пучок, который в квазиустановившемся состоянии является однородным.

А. С. Монин

11 В174. Импедансные граничные условия для статистически неровных поверхностей. Senior T. B. A. Impedance boundary conditions for statistically rough surfaces. «Appl. Scient. Res.», 1960, **B8**, № 5-6, 437—462 (англ.)

Показано, что при падении электромагнитного поля на абсолютно проводящую поверхность с малыми вероятностями, распределенными случайно и равномерно, граничные условия можно заменить на обобщенное импедансное условие, относящееся к средней поверхности. Для сведения граничных условий к импедансным используется метод малых возмущений, развитый Фейнбергом для задачи распространения радиоволн вдоль земной поверхности. Высота неровностей предполагается малой по сравнению с длиной волны, а наклоны поверхности малыми по сравнению с единицей. Импеданс поверхности оказывается тензором, зависящим от направления падения волны и статистических свойств неровности. Указывается также, что метод может быть применен не только к случаю, когда средняя поверхность плоская, но и к случаю, когда средняя поверхность искривлена; при этом радиус кривизны должен быть велик по сравнению с длиной волны. В последнем случае искривление средней поверхности влияет на изменение импеданса так же, как и изменение проводимости. Б. Ф. Курьянов

11 В175. О распространении случайной радиации в свободном пространстве. Beran Mark J. On the propagation of random radiation in free space. Statist. methods radio wave propag. London — Oxford — New York — Paris. 1960, 93—98 (англ.)

Определяется m-точечная корреляционная функция $J_m(X_1, X_2, \dots, X_m)$ скалярного волнового поля $E(x)$, удовлетворяющего уравнению $(\nabla^2 + K^2)E = 0$, где $K = \omega/c$ — волновое число. Устанавливается, что функция J_m удовлетворяет (по каждому своему аргументу) такому же волновому уравнению. Решается задача о нахождении функции J_m вне данной поверхности S при заданных ее значениях на S и условии излучения на бесконечности. Сказывается, что для этого необходимо решить волновое уравнение m раз. Детально рассматривается двухточечная корреляционная функция в случаях, когда S — бесконечная плоскость $z = 0$, в которой значения $E(X)$ однородны и изотропны, и масштаб корреляции очень мал или очень велик по сравнению с длиной волны. Обсуждается вопрос об использовании полученных результатов для расчета корреляционной функции радиоволн при ионосферном рассеянии.

А. С. Монин

11 В176. Пуанкаре, метрическая надежность и электрические цепи. Mullin A. A. Poincaré, metric reliability and switching components. «IRE Trans. Inform. Theory», 1959, **5**, № 3, 137 (англ.)

На примере использования понятий теории вероятностей и метрических пространств в теории стохастических компонент электрических цепей иллюстрируется идея Пуанкаре (1905), что физический континуум (в отличие от математического) не обладает свойством транзитивности отношения равенства. Именно, пусть $\alpha = \{A, B, \dots\}$ — множество состояний компоненты электрической цепи (имеющее мощность не свыше алефнуль), A — состояние установившегося возбуждения, B — соответствующее установившееся состояние реакции, Λ_B — множество состояний реакции, отличных от B, и $P(A, b)$ при $b \in \Lambda_B$ — вероятность того, что состояние b соответствует возбуждению A. Величина

$$P_\varepsilon(A, B) = \sum_{b \in \Lambda_B} P(A, b)$$

(если она существует) называется вероятностью ошибки для данной компоненты. Формулируются постулаты:

(а) $P_\varepsilon(A, B) = 1$ тогда и только тогда, когда $A = B$;

(б) $P_\varepsilon(A, B) = P_\varepsilon(B, A)$;

(в) $P_\varepsilon(A, B) = P_\varepsilon(B, C) \leqslant P_\varepsilon(A, C)$.

Последнее условие заменяет эффект транзитивности. Тогда

$$r(A, B) = -\ln P_\varepsilon(A, B)$$

— функция надежности компоненты; она играет роль метрики Фреше на множестве состояний, и $\frac{r}{1+r}$ является ограниченной метрикой. А. С. Монин

11 В177. Стохастическая тарировка нелинейных часов. Kendall David G. Stochastic rectification of non-linear clocks. «Nature (Engl.)», 1959, **184**, № 4697, Suppl. № 19, 1476 (англ.)

Часами называется детерминистический механизм, позволяющий отсчитывать значения монотонно-возрастающей (не обязательно непрерывной) функции $\alpha(t)$ времени t. Если вид этой функции заранее неизвестен, для тарировки механизма предлагается использовать наблюдения за координатой $x(t)$ броуновской частицы. Пусть α_r $(r = 1, 2, \dots, N = 2^n)$ — равноотстоящие точки деления интервала $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ и $x(r)$ — соответствующие значения координаты частицы. Тогда истинное время T, соответствующее отсчету часов $\alpha = 1$, можно

определить на основании теоремы Леви, согласно которой

$$S_n = \sum_{r=1}^{N} [x(r) - x(r-1)] \to T \quad (n \to \infty)$$

с вероятностью единица. А. С. Монин

11 В178. Статистический анализ погрешностей в экспериментах по группированию сигналов. Гольцман Ф. М. «Геология и геофизика», 1960, № 12, 86—99 (рез. англ.)

Рассматриваются системы приемников, предназначенные для выделения сигналов, приходящих из определенного направления. Изучается влияние случайного разброса характеристик системы на качество ее работы. В. Ф. Писаренко

11 В179. Стохастические модели химических реакций: II. Постоянная скорости унимолекулярных реакций. Bartholomay Anthony F. Stochastic models for chemical reactions. II. The unimolecular rate constant. «Bull. Math. Biophys.», 1959, **21**, № 4, 363—373 (англ.)

Часть I см. РЖМат, 1959, 9356. Рассматривается статистическая модель химической реакции, в которой состоянием системы является концентрация реагента, измеряемая в целочисленных единицах и могущая принимать одно из значений $0, 1, \ldots, n_0$, где n_0 — начальная концентрация. Предполагается, что состояния образуют во времени однородный марковский процесс с вероятностями перехода за время t, равными

$$p_{ik}(t) = \binom{i}{k} e^{-\mu i t} (e^{\mu t} - 1)^{i-k}; \quad 0 \leqslant k < i \leqslant n_0.$$

При этом математическое ожидание и дисперсия состояния n в момент t определяются формулами

$$E(n, t) = n_0 e^{-\mu t}; \quad \sigma^2(n, t) = n_0 (e^{-\mu t} - e^{-2\mu t}).$$

Решается задача об оценке (методом максимума правдоподобия) параметра μ по данным R серий измерений концентрации в моменты st; $s = 0, 1, \ldots, S$. Решение иллюстрируется на примерах конкретных химических реакций. А. С. Монин

11 В180. О применении понятия информации в статистической физике. Stahl A. Zur Anwendung des Informationsbegriffes in der statistischen Physik. «Z. Naturforsch.», 1960, **15 a**, № 8, 655—662 (нем.)

Развивается субъективистская трактовка основных понятий статистической механики, исходящая из замены понятия неупорядоченности понятием «незнания наблюдателя». Энтропия механической системы трактуется как мера этого «незнания». Количество информации и энтропия рассматриваются в качестве исходных понятий. Указанная субъективистская трактовка иллюстрируется на примерах классических и квантовых механических систем и используется для толкования понятия необратимости. А. С. Монин

11 В181. Количество информации и физические системы. Berger L. Quantité d'information, et systémes physiques. «Helv. phys. acta», 1958, **31**, № 2, 159—166 (франц., рез. англ.)

Цель этой статьи — показать, как «количество информации» может быть введено для того, чтобы описать статистическую корреляцию между физическими системами. Из резюме автора

11 В182. IRE — стандарты теории информации: определения терминов, 1958. IRE Standards on information theory: definitions of terms, 1958. «Proc. IRE», 1958, **46**, № 9, 1646—1648 (англ.)

11 В183. Потеря и восстановление информации при грубом наблюдении стохастической цепи. Watanabe Satosi, Abraham Chacko T. Loss and recovery of information by coarse observation of stochastic chain. «Inform. and Control», 1960, **3**, № 3, 248—278 (англ.)

Рассматривается стационарный процесс с конечным числом состояний $1, 2, \ldots, n$ (стохастическая цепь). Пусть

$$S^{(k)} = -\sum_{x_1=1}^{n} \sum_{x_2=1}^{n} \ldots \sum_{x_k=1}^{n} p^{(k)}(x_1, x_2, \ldots, x_k) \times$$

$$\times \log p^{(k)}(x_1, x_2, \ldots, x_k),$$

где $p^{(k)}(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ — вероятность цепочки $x_1, x_2, \ldots, x_k$ и $G^{(k)} = \frac{1}{k} S^{(k)}$. Состояния $1, 2, \ldots, n$ (микросостояния) группируются в $\nu \leqslant n$ классов (макросостояния). Пусть $\sum^k$ — энтропия (называемая автором информацией) последовательности макросостояний $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$ и $\Gamma^{(k)} = \frac{1}{k} \sum^{(k)}$. Основной результат работы состоит в том, что

$$S^{(1)} - \sum^{(1)} \geqslant G^{(k)} - \Gamma^{(k)}.$$

Знак равенства достигается, в частности, когда $x_1, x_2, \ldots, x_k$ независимы. Подробно рассматривается случай марковской цепи. С. В. Нагаев

11 В184. Общая формулировка основной теоремы Шеннона в теории информации. Добрушин Р. Л. «Успехи матем. наук», 1959, **14**, № 6, 3—104

Случайные величины ξ, η, $\widetilde{\eta}$ и $\widetilde{\xi}$ определены на измеримых пространствах X, Y, $\widetilde{Y}$ и $\widetilde{X}$ сообщений и сигналов на входе, сигналов и сообщений на выходе соответственно. Сообщением с точностью воспроизведения W называется совокупность распределений $\{W\}$, состоящая из совместных распределений пар величин $(\xi, \widetilde{\xi})$ таких, что индуцируемые ими распределения p_ξ совпадают, и таких, что для некоторого M-мерного множества $\overline{W}$ и M действительных измеримых функций $\rho_i(x, \widetilde{x})$ $(i = 1, \ldots, M)$ вектор

$$(M\rho_1(\xi, \widetilde{\xi}), \ldots, M\rho_M(\xi, \widetilde{\xi})) \in \overline{W}.$$

Передающим устройством называется пара совокупностей распределений $\{Q, Y\}$, где $Q = Q(y, \cdot)$ — распределение вероятностей на $\widetilde{Y}$ при фиксированном $y \in Y$, а совокупность распределений V-состоит из распределений пар величин $(\eta, \widetilde{\eta})$ ограниченных требованием, чтобы для некоторого N-мерного множества $\overline{V}$ и N действительных измеримых функций $\pi_i(y, \widetilde{y})$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$, вектор

$$(M\pi_1(\eta, \widetilde{\eta}), \ldots, M\pi_N(\eta, \widetilde{\eta})) \in \overline{V}.$$

Последовательность пар величин (ξ^t, η^t), обладающих информационной плотностью $i^t_{\xi\eta}(x, y)$, называется информационно-устойчивой, если

$$\lim_{t \to \infty} P^t \left\{ \left| \frac{i_{\xi\eta}(\xi, \eta)}{I(\xi, \eta)} - 1 \right| > \varepsilon \right\} = 0,$$

где

$$i_{\xi\eta}(x, y) = \log a_{\xi\eta}(x, y),$$

$$P_{\xi\eta}(B) = \int_B a_{\xi\eta}(x, y) P_\xi(dx) P_\eta(dy),$$

$$I(\xi, \eta) = M i_{\xi\eta}(\xi, \eta).$$

Энтропией сообщения с точностью воспроизведения W называется число

$$H(W) = \inf_{P_{\xi\widetilde{\xi}} \in W} I(\xi, \widetilde{\xi}).$$

Последовательность сообщений $\{W^t\}$ называется информационно-устойчивой, если существует информационно-устойчивая последовательность пар величин $(\xi^t, \widetilde{\xi}^t)$ такая, что $P_{\xi^t \widetilde{\xi}^t} \in W^t$ и

$$\lim_{t\to\infty} \frac{I^t(\xi, \widetilde{\xi})}{H^t(W)} = 1.$$

Пропускной способностью передающего устройства (Q, V) называется число

$$C(Q, W) = \sup_{P_{\eta, \widetilde{\eta}} \in \{Q, V\}} I(\eta, \widetilde{\eta}).$$

Последовательность передающих устройств $\{Q^t, V^t\}$ называется информационно-устойчивой, если существует информационно устойчивая последовательность пар величин $\{\eta^t, \widetilde{\eta}^t\}$ такая, что $P_{\eta^t \widetilde{\eta}^t} \in \{Q^t, V^t\}$ и

$$\lim_{t\to\infty} \frac{I^t(\eta, \widetilde{\eta})}{C^t(Q, V)} = 1.$$

Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n) \in U \subset R^n$ и

$$r(x', x'') = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i' - x_i''|.$$

При $\varepsilon \geqslant 0$ $x' \in [U]_\varepsilon \subset R^n$, если найдется $x'' \in U$ с $r(x', x'') \leqslant \varepsilon$, а при $\varepsilon < 0$ — если любая точка x'' с $r(x', x'') \leqslant -\varepsilon$ принадлежит U. Если заменить $\overline{W}$ на $[\overline{W}]_\varepsilon$, то получим сообщение, обозначаемое $\{W_\varepsilon\}$. Если заменить $\overline{V}$ на $[\overline{V}]_\varepsilon$, то получим передающее устройство, обозначаемое $\{Q, V_\varepsilon\}$. Говорят, что сообщение $\{W\}$ может быть передано при помощи передающего устройства $\{Q, V\}$ с точностью до события вероятности ε, если существуют величины ξ, η, $\widetilde{\eta}$, $\widetilde{\xi}$ и $\widetilde{\xi}'$ (определенная на $\widetilde{X}$), такие, что: 1) первые четыре образуют цепь Маркова, 2) $p_{\xi, \widetilde{\xi}} \in \{W\}$, 3) $p_{\eta, \widetilde{\eta}} \in \{V\}$, $P(\widetilde{\eta} \in A / \eta) = Q(\eta, \widetilde{A})$ почти всюду, 4) $P\{\widetilde{\xi} \neq \widetilde{\xi}'\} \leqslant \varepsilon$. Наиболее общая из доказанных автором следующая

Теорема. Пусть задана последовательность сообщений $\{W^t\}$ и передающих устройств $\{Q^t, V^t\}$ таких, что

I. $\lim_{t\to\infty} H^t(W) = \infty$,

II. $\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{H^t(W)}{C^t(Q, W)} < 1$.

III. Число M^t функций $\rho_i^t(x, \widetilde{x})$, входящих в определение сообщения, и число N^t функций $\pi_i^t(y, \widetilde{y})$, входящих в определение передающего устройства, таковы, что при любом $a > 0$

$$M^t = 0(2^{aH^t(W)}),$$

$$N^t = 0(2^{aC^t(Q, V)}).$$

IV. Последовательность передающих устройств является информационно устойчивой, причем существует информационно-устойчивая последовательность пар случайных величин $(\eta^t, \widetilde{\eta}^t)$, связанных передающим устройством $\{Q^t, V^t\}$, удовлетворяющих условию

$$\lim_{t\to\infty} \frac{I^t(\eta, \widetilde{\eta})}{C^t(Q, V)} = 1$$

и такая, что для некоторого $\overline{b} > 0$

$$\overline{c}^t = \max_{k=1,\ldots,N^t} M\{|\pi_k^t(\eta, \widetilde{\eta}) - M\pi_k^t(\eta, \widetilde{\eta})|^{1+\overline{b}}\},$$

при любом $a > 0$

$$\overline{c}^t = 0(2^{aC^t(Q, V)}).$$

V. Последовательность сообщений является информационно-устойчивой; причем существует информационно-устойчивая последовательность пар случайных величин $\{\xi^t, \widetilde{\xi}^t\}$, удовлетворяющих условиям точности воспроизведения $\{W^t\}$, условию

$$\lim_{t\to\infty} \frac{I^t(\xi, \widetilde{\xi})}{H^t(W)} = 1$$

и такая, что для некоторого $b > 0$ и

$$c^t = \max_{k=1,\ldots,M^t} M\{|\rho_k^t(\xi, \widetilde{\xi}) - M\rho_k^t(\xi, \widetilde{\xi})|^{1+b}\}$$

при любом $a > 0$

$$c^t = 0(2^{aH^t(W)}).$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется столь большое T, что при всех $t \geqslant T$ сообщение $\{W_\varepsilon^t\}$ может быть передано при помощи передающего устройства $\{Q^t, V_\varepsilon^t\}$ с точностью до события вероятности ε. Обсуждается связь введенных понятий сообщения и передающего устройства с общепринятыми понятиями источника сообщений и канала связи и делается вывод об их равном праве на существование. В конце стр. 18 и 23 передающее устройство ошибочно называется каналом связи.

Б. С. Флейшман

11 В185. Идеальное устройство отождествления для сложных сигналов. Бородин Л. Ф. «Радиотехника», 1960, **15**, № 8, 42—52

Сравниваются различные методы декодирования при передаче конечного числа сообщений по каналу без памяти с непрерывным пространством символов на выходе. Даются алгебраические оценки и приводятся результаты вычислений на БЭСМ для вероятностей ошибок при оптимальном методе приема, основанном на отношении правдоподобия, при символьном методе приема, когда предварительно производится отождествление каждого из значений выходного символа со значением одного из входных символов, при методе приема по наиболее надежным символам, т. е. по символам на выходе, имеющим наибольшие априорные вероятности и т. д.

Р. Л. Добрушин

11 В186. О существовании кодов Баркера. Иванова И. М., Кетков Ю. Л., Ямпольская Т. С. «Изв. высш. учебн. заведений. Радиофизика», 1960, **3**, № 5, 911—913

Кодом Баркера называется последовательность чисел a_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$; принимающих значения ± 1, такая, что $\left|\sum_{j=1}^{l} a_j a_{j+n-l}\right| = 1$ при любом нечетном l $(1 \leqslant l < n)$ и $\sum_{j=1}^{l} a_j a_{j+n-l} = 0$ при любом четном l $(2 \leqslant l < n)$.

В статье Ю. В. Поляка и Р. В. Мошетова (Научн. тр. Радиотехн. ин-та АН СССР, 1959, **1**, 124) было доказано, что коды Баркера не существуют для $n = 4k \pm 1$ при $n > 13$. В реферируемой заметке доказывается, что коды Баркера не существуют для $n = 4k + 2$ $(k = 1, 2, \ldots)$, и приводятся несколько свойств кодов Баркера для $n = 4k$ (при условии, что последние существуют). Утверждается также, что путем проверки установлено отсутствие кодов Баркера для $n = 8, 12, 16, 20$.

В. И. Левенштейн

11 В187. О верхних границах для кодов с минимальным расстоянием. Джоши Д. Д. «Кибернет. сб.» 1. Изд-во ин. лит., 1960, 227—233

Перевод с английского (РЖМат, 1959, 7202).

11 В188. Пропускная способность некоторых многолучевых каналов связи. Цыбаков Б. С. «Радиотехн. и электроника». 1959, **4**, № 10, 1602—1608

Рассматривается канал связи, в котором волна, поступающая на приемную антенну, состоит из двух компонент: прямой волны и волны, обусловленной рассеянием. Выход канала $\eta(t)$ связан с передаваемым сигналом $\xi(t)$ соотношением

$$\eta(t) = a_0 \xi(t' - \tau_0) + \sum_{k=1}^{N} a_k(t)\, \xi[t - \tau_k(t)] + \zeta(t),$$

где a_0 и τ_0 — некоторые постоянные, определяющие затухание и время распространения прямой волны, $\zeta(t)$ — аддитивный гауссовский шум, а стационарная векторная функция времени $\mathbf{r}(t)$ с координатами $\{a_1(t), \ldots, a_N(t); \tau_1(t), \ldots, \tau_N(t)\}$, не зависящая от $\xi(t)$ и $\zeta(t)$, характеризует рассеянную волну. В предположении, что функции $a_k(t)$ и $\tau_k(t)$ являются настолько медленными функциями времени, то их за время кодирования можно считать постоянными случайными величинами, такими, что плотность вероятности распределения величины

$$h(\omega, \mathbf{r}) = \left| a_0 e^{i\omega\tau_0} + \sum_{k=0}^{N} a_k e^{i\omega\tau_k} \right|$$

не зависит от ω и выражается обобщенным законом Релея, и с использованием результатов работы Р. Л. Добрушина, Я. И. Хургина и Б. С. Цыбакова (РЖМат, 1961, 9В196) получена формула для пропускной способности канала в виде ряда. В случае, когда мощность сигнала на выходе канала намного меньше мощности шумов, пропускная способность совпадает с соответствующей величиной для однолучевого канала, имеющего коэффициент передачи по мощности $\left(a_0'\right)^2 = a_0^2 + \sigma^2$, где σ^2 — дисперсия $|h(\omega, \mathbf{r})|$. Получены простые формулы для двух предельных случаев, когда мощность прямого луча много больше или много меньше мощности рассеянной компоненты. В. П. Яковлев

11 В189. Определение ошибки для оптимальных прогнозирующих фильтров. Benedict T. R., Rideout V. C. Error determination for optimum predicting filters. «Proc. Nat. Electronics Conf. Vol. 13. Chicago, Nat. Electronics Conf., Inc.», 1958, 875—887 (англ.)

Рассматривается обычная задача об определении наилучшего приближения $c(t)$ к значению $r(t+\alpha)$ сигнала $r(t)$ в момент $t+\alpha$ (где α может быть и положительным, и отрицательным, и нулем), линейно зависящего от значений при $t' \leqslant t$ суммы $r(t') + n(t')$ двух некоррелированных стационарных процессов $r(t')$ и $n(t')$. Средний квадрат ошибки здесь по определению равен $E(\alpha) = \mathbf{M}[r(t+\alpha) - c(t)]^2$ (где $\mathbf{M}$ — знак математического ожидания); помимо того, вводится еще «обобщенная функция ошибки» (о. ф. о.), равная $E_2(\tau) = \mathbf{M}[r(t) - c(t+\tau)]^2$ (обращающаяся в $E(\alpha)$ при $\tau = -\alpha$). Обсуждается вопрос о нахождении этой о. ф. о. с помощью моделирующих устройств; далее для шести конкретных примеров процессов $r(t)$ и $n(t)$ с рациональным спектром вычисляется функция $E_2(\tau)$ (зависящая от «срока прогноза» α, как от параметра, отвечающая исходному оптимальному фильтру, преобразующему $r(t) + n(t)$ в $c(t)$) и приводятся графики этой функции для всех шести примеров процессов и трех значений параметра α в каждом случае. Для последних двух рассмотренных примеров дается схема моделирующего устройства, позволяющего (при наличии генератора белого шума) экспериментально получить функцию $E_2(\tau)$, и указывается, что проведенные опыты дали очень хорошее соответствие полученной экспериментальной кривой с теоретическими формулами и графиками. Далее указывается, что о. ф. о. может быть использована для определения «степени устойчивости» (или «критичности») оптимального фильтра, т. е. для выяснения того, насколько резко увеличивается ошибка, если фильтр, оптимальный для прогноза на срок α, использовать для прогноза на какой-либо близкий (но отличный от α) срок и для нахождения «временной полосы» фильтра, в пределах которой он дает ошибку, превышающую ошибку прогноза на срок α не более чем на заданное число процентов (например, не более чем на 10%); оба эти возможных применения о. ф. о. иллюстрируются на разобранных выше шести примерах. А. М. Яглом

11 В190. Согласованные фильтры для многомерных процессов. Balakrishnan A. V. Matched filters for multiple processes. «IRE Trans. Inform. Theory», 1961, 7, № 1, 52 (англ.)

Рассматривается задача об оптимальном выделении q-мерного действительного векторного детерминированного сигнала $\mathbf{S}(t)$ из суммы $\mathbf{X}(t) = \mathbf{S}(t) + \mathbf{N}(t)$, где $\mathbf{N}(t)$ — q-мерный стохастический процесс, с помощью линейного фильтра, выход которого $\mathbf{Y}(t)$ связан с входом $\mathbf{X}(t)$ матричным интегральным соотношением

$$\mathbf{Y}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{W}(t - \sigma)\, \mathbf{X}(\sigma)\, d\sigma,$$

причем $\mathbf{Y}(t)$ — m-мерная векторная функция, а $\mathbf{W}(t)$ — матричная функция, на которую наложено условие физической реализуемости: $\mathbf{W}(t) = \mathbf{0}$ при $t < 0$ ($\mathbf{0}$ — нулевая матрица). Автор замечает, что в данном случае можно дать несколько определений понятия «отношение сигнал/шум», и показывает, что для всех практически интересных определений оптимизация приводит к одному и тому же матричному интегральному уравнению для отыскания характеристики согласованного фильтра. В. П. Яковлев

11 В191. Замечания об отношении сигнал/шум на выходе полосового ограничителя. Cahn Charles R. A note on signal-tonoise ratio in band-pass limiters. «IRE Trans. Inform. Theory», 1961, 7, № 1, 39—43 (англ.)

Решается задача о прохождении суммы сигнала и шума через ограничитель, который устраняет амплитудную модуляцию входного сигнала, оставляя неизменной его частотную модуляцию. Рассматривается случай, когда амплитуда сигнала мала, а шум представляет собой произвольный стационарный случайный процесс. Показано, что в практически интересных случаях уменьшение отношения сигнал/шум при использовании ограничителя незначительно. Подробно исследуются случаи, когда шум является гауссовским процессом, или представляет собой сумму синусоиды и гауссовского процесса. Рассмотрен пример использования ограничителя в широкополосной корреляционной системе. В. П. Яковлев

11 В192. Корреляторы любого числа сигналов. Melton Ben S., Bailey Leslie F. Multiple signal correlators. «Geophysica», 1957, 22, 565—588 (англ.)

Обсуждаются методы корреляции любого числа сравниваемых входных функций или сигналов. Показано, что значения корреляции могут быть получены любым из нескольких арифметических процессов, измеряющих степень совпадения входов, и что эти процессы могут быть механизированы. Сюда входит простое сложение, схема совпадения знаков и два процесса, основанные на анализе отклонений. Показано, что отношение сигнал/шум однозначно связано с статистической значимостью и обнаружимость сигнала находится как функция числа входов и продолжительности сигнала. Указываются и иллюстрируются некоторые способы представления данных. Из резюме автора

11 В193. Функция ковариации простого полнодоступного пучка и ее приложения к измерению интенсивности нагрузки. Beneš V. E. The covariance function of a simple trunk group, with applications to traffic measure-

ment. «Bell System Techn. J.», 1961, 40, № 1, 117—148 (англ.)

Рассматривается система массового обслуживания, состоящая из N одинаковых каналов, распределение времени обслуживания показательное со средним, равным 1, входящий поток пуассоновский с интенсивностью a. Требование, заставшее все каналы занятыми, теряется. В работе дается методика вычисления корреляционной функции для случайного процесса $N(t)$, равного числу занятых линий в момент t. Показано, что эта корреляционная функция

$$R(t) = -a^2 p_N \sum_{j=1}^{N} \frac{e^{r_j t}}{r_j (1+r_j)^2} \prod_{i \neq j} \frac{r_j - 1 - r_i}{r_j - r_i},$$

где $p_N = a^N/N! \sum_{k=0}^{N} \frac{a^k}{k!}$, а r_j $(j = 1, \ldots, N)$ — корни уравнения

$$\sigma_{s+1}(N) = 0, \qquad (1)$$

$\sigma_s(n)$ определяются из уравнения

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \sigma_s(n) = (1-z)^{-s} \cdot e^{az}.$$

Указывается, что для оценки сверху корреляционной функции можно пользоваться неравенством

$$R(t) \leqslant R(0) \cdot e^{-r_1 t},$$

где r_1 — наибольший корень уравнения (1). Зная корреляционную функцию, можно оценить дисперсию ошибки при вычислении средней загруженности системы. Если наблюдения ведутся в дискретные моменты времени, разделенные интервалом $\tau > 0$, то оценкой средней загруженности является $\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} N(j\tau)$, где n — число наблюдений. Дисперсия ошибки

$$\operatorname{Var}\left\{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} N(j\tau)\right\} =$$

$$= -\frac{a^2 p_N}{n} \sum_{j=1}^{N} \frac{\left[\operatorname{cth}\left(-\frac{\tau r_j}{2}\right) - \frac{1-e^{\tau r_j n}}{2n} \operatorname{ch}\left(-\frac{\tau r_j}{2}\right)\right]}{r_j (1+r_j)^2} \times$$

$$\times \prod_{i \neq j} \left(1 - \frac{1}{r_j - r_i}\right).$$

В работе имеется много графиков, иллюстрирующих проделанные вычисления. Эти графики частично можно использовать при расчетах. Ю. К. Беляев

11 В194. Исследование многолинейной системы обслуживания с очередью и ограниченным временем пребывания в системе. Коваленко И. Н. «Укр. матем. ж.», 1960, 12, № 4, 471—476

Рассматриваемая система массового обслуживания состоит из n одинаковых каналов с показательным временем обслуживания со средним $\frac{1}{\mu}$. Моменты поступлений требований образуют пуассоновский поток с интенсивностью λ. Требования, заставшие все каналы занятыми, становятся в очередь. Требование, поступившее ранее других, принимается к обслуживанию в первую очередь. При наличии в момент поступления очередного требования нескольких свободных каналов оно поступает на один из них (при этом может быть выбран с равной вероятностью любой из свободных каналов). Общее время пребывания каждого требования в системе, т. е. время ожидания плюс время обслуживания, не может быть более τ. D. Y. Barrer (РЖМат, 1958, 7033), рассматривавший ранее эту же систему массового обслуживания, сделал существенную ошибку. В настоящей работе для стационарного случая методом сведения к многомерному марковскому процессу отыскивается целый ряд характеристик описанной выше системы: распределение числа занятых линий, распределение времени ожидания, вероятность полного обслуживания требования. Эти характеристики выражаются через плотности вероятностей $p_k(x_1, \ldots, x_k)$, $1 \leqslant k \leqslant n$, того, что в момент t в системе занято k каналов и i-й канал освободится от требований, поступивших до момента t, за время, равное x_i, $i = 1, \ldots, k$.

Примечание референта. При вычислении распределения времени ожидания, стр. 475, вместо вероятности события $\{\min_{1 \leqslant i \leqslant n} \xi_i \leqslant x\}$ была подсчитана вероятность события $\{\max_{1 \leqslant i \leqslant n} \xi_i \leqslant x\}$, поэтому в приведенные далее формулы нужно внести исправления, что легко сделать.

Ю. К. Беляев

11 В195. Зависящее от времени решение для пуассоновской очереди с несколькими обслуживающими приборами. Saaty Thomas L. Time-dependent solution of the many-server Poisson queue. «Operat. Res.», 1960, 8, № 6, 755—772 (англ.)

Рассматривается классическая задача обслуживания требований несколькими одинаковыми приборами. Требования обслуживаются в порядке очередности поступления, каждый прибор обслуживает одно требование, каждое требование обслуживается одним прибором. Поток требований простейший, длительность обслуживания имеет показательное распределение. $P_k(t)$ означает вероятность того, что в момент t в системе обслуживания имеется k требований (k=0, 1, 2 ....). Соответствующая система дифференциальных уравнений решается с помощью преобразований Лапласа. Явные формулы приведены для случая двух приборов. Указаны условия существования и единственности решения. Для случая двух приборов рассмотрена возможность различных распределений длительности обслуживания для разных приборов. Найдено преобразование Лапласа для периода занятости всех приборов. Приведена обширная библиография статей, посвященных интересующим автора вопросам. Б. В. Гнеденко

11 В196. Нестационарное решение проблемы группового обслуживания. Jaiswal N. K. Time-dependent solution of the bulk-service queuing problem. «Operat. Res.», 1960, 8, № 6, 773—781 (англ.)

Работа представляет собой непосредственное продолжение статьи того же автора (РЖМат, 1961, 4 В178). Это дает нам возможность не формулировать рассматриваемую им систему обслуживания. Новое в настоящей работе состоит в том, что автор посредством преобразований Лапласа находит нестационарное (зависящее от времени) решение соответствующей системы дифференциальных уравнений. Б. В. Гнеденко

11 В197. Две параллельные очереди. Haight Frank A. Two queues in parallel. «Biometrika», 1958, 45, № 3-4, 401—410 (англ.)

Автор исследует систему массового обслуживания, когда требования обслуживаются двумя приборами, длительности обслуживания имеют показательное распределение с параметрами μ и μ'. Требования становятся в очередь к тому прибору, где очередь короче. Входящий поток предполагается пуассоновским с плотностью λ. В стационарном случае выводится уравнение для производящей функции $\varphi(s, s') = \sum_x \sum_y p_{xy} s^x s'^y$,

где p_{xy} — вероятность того, что длина очереди у первого прибора равна x, а у второго y. Исследуются некоторые характеристики такой системы. С. М. Броди

11 В198. Финальные вероятности многомерного марковского процесса, описывающего действие некоторых двухкаскадных телефонных систем с отказами. Башарин Г. П. «Теория вероятностей и ее применения», 1958, 3, № 4, 452—458 (рез. англ.)

Рассматривается двухкаскадная телефонная система с отказами, состоящая из k коммутаторов A_l ($l = 1, \ldots, k$) первого каскада и одного коммутатора B второго каскада. Коммутатор A_l имеет n_l входов и m_l выходов, коммутатор B — $\sum_{l=1}^{k} m_l$ входов и l выходов. На входы коммутаторов A_l поступают независимые пуассоновские потоки вызовов с постоянной интенсивностью λ_l и продолжительностью занятия линии, распределенной экспоненциально с параметром μ_l. Вызов, попавший в A_l, направляется по любому из свободных путей на коммутатор B. Порядок обслуживания коммутатором B может быть двояким: либо с равной вероятностью занимается любой из свободных выходов (режим свободного искания), либо предполагается заданной вероятность γ_{lj} того, что вызов, поступивший на A_l, будет адресован на j-й выход B (режим направленного искания). Отказ возникает, если заняты все входы или все выходы соответствующего коммутатора A_l или если заняты все выходы коммутатора B (режим свободного искания) или выход, на который адресован вызов (режим направленного искания). Вычисляются финальные вероятности многомерного марковского процесса с непрерывным временем и конечным числом состояний, описывающего указанную телефонную систему. С. М. Броди

11 В199. Задача о движущемся сервере. Karlin S., Miller R. G., Jr. Prabhu N. U. Note on a moving single server problem. «Ann. Math. Statistics», 1959, 30, № 1, 243—246 (англ.)

Изучается распределение времени до поглощения в задаче о движущемся сервере (обслуживающем), впервые рассматривавшейся Мак-Милланом и Риорданом (РЖМат, 1959, 3031). Предполагается, что вдоль агрегатной линии, движущейся с единичной скоростью, расположены заказчики. Сервер движется вместе с линией, пока происходит обслуживание, и с бесконечной скоростью — в противоположном направлении, когда обслуживание передается к следующему заказчику. На линии имеется экран, в котором сервер «поглощается» в том смысле, что обслуживание прекращается, как только сервер достигнет экрана. Промежутки между заказчиками — независимые случайные величины с функцией распределения $B(t)$, время обслуживания — показательное с параметром α. Отмечается, что распределение времени до поглощения сервера, если в начальный момент расстояние до экрана было T, совпадает с распределением периода занятости в системе очереди $M|G|1$ (РЖМат, 1956, 3218), в которой продолжительность обслуживания первого заказчика равна T. Производящая функция числа обслуженных за период занятости $P(x, T)$ и преобразование Лапласа $H(s, T)$ распределения периода занятости в такой системе удовлетворяют интегральным уравнениям

$$P(x, T) = \exp\left\{-\alpha T\left(1 - x\int_0^\infty P(x, t)\, dB(t)\right)\right\},$$

$$H(s, T) = \exp\left\{-sT - \alpha T\left(1 - \int_0^\infty H(s, t)\, dB(t)\right)\right\}.$$

В двух частных случаях ($B(t)$ — единичное или показательное распределение) вычисляются $P(x, T)$ и $H(s, t)$. М. И. Ядренко

11 В200. Полезность статистик случайных чисел. Clark Charles E. The utility of statistics of random numbers. «Operat. Res.», 1960, 8, № 2, 185—195 (англ.)

Известно, что использование многоступенчатого выбора в статистике позволяет уменьшить объем выборки. На примере простой задачи теории массового обслуживания автор показывает применимость той же идеи и к методу Монте-Карло для повышения его эффективности. Таблица случайных чисел, имеющих плотность распределения e^{-x}, $0 \leqslant x < \infty$, разбита на группы по сто чисел, для каждой группы подсчитаны некоторые характеристики. С использованием известных для каждой группы среднего значения и количества чисел, расположенных справа и слева от медианы, строится многоступенчатый выбор из таблицы случайных чисел. При генерировании случайных или псевдослучайных чисел на машине необходимые характеристики могут быть определены после получения очередной группы чисел.

В. А. Михайлов

11 В201. Введение в теорию массового обслуживания. Ruiz Palá Ernesto, Tolrá Jaime. Introducción a la teoría de las líneas de espera o colas. «Dyna», 1959, 34, № 7, 519—525 (исп.)

Элементарная статья обзорного характера.

Н. Н. Воробьев

11 В202. Применение метода Бокса — Вильсона в химической промышленности. Messikommer B. H. Die Anwendung der Box—Wilsonschen Methode in der chemischen Industrie. «Unternehmensforschung», 1960, 4, № 3, 112—137 (нем.; рез. англ., франц.)

Статистическое планирование эксперимента с помощью метода Бокса — Вильсона, основанное на оптимизации функции нескольких количественных переменных, уже оказалось полезным в химической промышленности. Метод иллюстрируется примером, обсужденным во всех подробностях, указана его математическая формализация. Кратко обсуждаются методы экспериментального планирования, пригодные в этом примере. Кроме того, обобщаются некоторые современные тенденции в этой области. Детальная библиография включена как помощь в дальнейшем изучении. Резюме автора

11 В203. Статистический метод контроля. Проверка каждого k-го изделия. Obalski J. Eine statistische Kontrollmethode. Prüfung jedes k-ten Werkstückes. «Feingerätetechnik», 1957, 6, № 9, 397—401 (нем.)

Предполагается, что в процессе производства оцениваемый параметр изменяется от изделия к изделию в среднем на m, отклонение его на каждом шаге распределено нормально с постоянной дисперсией. Изделие считается годным, если этот параметр находится в некотором интервале, и бракуется в противном случае. Предлагается следующий метод контроля. Проверяется k-е, $2k$-е, ... изделия. При обнаружении брака на i-ом шаге дополнительно проверяются все изделия от $(i-1)k+1$ до $ik-1$. Бракованные изделия удаляются, производится переналадка оборудования с целью уменьшения m и начинается новый цикл. Выводятся формулы математического ожидания числа изделий до первого обнаружения брака, числа изделий, подвергнутых проверке, числа обнаруженных бракованных изделий, числа необнаруженных бракованных изделий и т. д. Выписывается формула потерь, учитывающая стоимость каждого испытания, убыток от изъятия бракованного изделия и убыток от необнаружения брака.

А. Х. Заславский

11 В204. Ранние отказы при испытаниях долговечности. Miller Rupert G., Jr. Early failures in life testing. «J. Amer. Statist. Assoc.», 1960, 55, № 291, 491—502 (англ.)

При испытаниях долговечности иногда наблюдается значительное число ранних отказов, так что экспоненциальное распределение для плотности отказов не годится. В статье рассматривается модель с двумя интенсив-

ностями отказов. В начальный интервал времени $[0, T_0)$ действует более высокая интенсивность отказов, а потом действует более низкая. Получены оценки максимума правдоподобия при известном T_0 и выведены их асимптотические свойства (большое число испытываемых деталей, заданная продолжительность испытания). При неизвестном T_0 предлагаются другие оценки и указываются их асимптотические свойства. О. М. Калинин

11 В205. Выводы из испытаний с постоянно возрастающим напряжением. Allen William R. Inference from tests with continuously increasing stress. «Operat. Res.», 1959, 7, № 3, 303—312 (англ.)

Пусть $P(t)$ и $Q(t)$ — две функции распределения. Если $P(t) \leqslant Q(t)$ для всех t и строгое неравенство имеет место для множества значений t положительной меры, то Q называется ускорением P. Функция f такая, что $Q(t) = P(f(t))$, называется ускоряющей. Показывается, что при некоторых ограничениях распределение продолжительности службы конденсаторов, подвергенных испытанию при возрастающем напряжении $V = at^b$, $b>0$, получается из показательного при помощи ускоряющей функции $f(t) = ct^d$, где c и d — некоторые постоянные, зависящие от a, b, параметра λ исходного показательного распределения и некоторого параметра n, общего для всех конденсаторов данной конструкции. Предлагаются различные методы для оценки λ и n.

С. В. Нагаев

11 В206. Об оценке общего объема данного количества связок бревен. Hellman Olavi. On the estimation of the total volume of a given number of bundles of logs. «Turun yliopiston julkaisula», 1960, Sar. AI, № 44, 5 pp. (англ.)

В предположении независимости количества бревен в каждой связке используется центральная предельная теорема и показывается асимптотическая нормальность объема связки бревен как случайной величины. Предлагается измерять выборочные объемы некоторого количества связок и затем использовать известные формулы. (Задача сводится к использованию распределения Стьюдента). Л. Д. Фельдман

11 В207. Формула дисперсии при типическом отборе проб. Орехов М. Н. «Изв. высш. учебн. заведений. Технол. текстильн. пром-сти», 1960, № 5, 20—28

Для испытания z пакорок продукта из каждой пакорки взято по h образцов. Пусть x_{ik} означает результат испытания k образца, взятого из i-й пакорки. Предполагается, что x_{ik} независимы и нормально распределены с математическим ожиданием ξ_i и дисперсией σ^2. ξ_i в свою очередь предполагаются нормально распределенными с математическим ожиданием ξ и дисперсией ω^2. Пусть также

$$\overline{x}_i = \frac{1}{h}\sum_k x_{ik}; \quad \overline{x} = \sum \overline{x}_i/z; \quad \sigma^2_{ey} = \sum (\overline{x}_i - \overline{x})^2/z - 1;$$

$$\sigma_i^2 = \sum_{j,\,k} (x_{jk} - \overline{x}_j)^2/z\,(h-1).$$

Очевидно, что $M\sigma^2_{ey} = \omega^2 + \frac{\sigma^2}{h}$. Отсюда делается вывод, что ω^2 можно оценивать по формуле $\sigma^2_{ey} - \frac{\sigma_i^2}{h}$.

Л. Д. Мешалкин

11 В208. Об одном методе параметризации уравнений кривых распределения (на примере кривой «дожития»). Карапетян А. Х. «Научн. зап. Моск. финанс. ин-т», 1957, вып. 9, 33—45

Предполагается, что время работы элементарной единицы средств труда превышает t с вероятностью

$$F(t) = p^{t-t_0} \int_{\frac{t-a}{\sigma}}^{\infty} e^{-z^2/2}\,dz,$$

где p — вероятность выбытия по случайным причинам (последствие аварии), a и σ — среднее значение и среднеквадратическое отклонение времени работы при естественном износе, t_0 — начальный «возраст» выбытия. Выводится система уравнений для оценки параметров p, a, σ через квантили эмпирического ряда, соответствующие вероятностям $^1/_4$, $^1/_2$, $^3/_4$, излагается метод ее решения с помощью номограмм. Приводится пример—распределение грузовых автопокрышек по километражу их пробега. Имеются опечатки. А. Х. Заславский

11 В209. Свойства случайной модели двух конкурирующих видов. Leslie P. H., Gower J. C. The properties of a stochastic model for two competing species. «Biometrika», 1958, 45, № 3-4, 316—330 (англ.)

Популяции видов S_1 и S_2 к моменту времени t состоят соответственно из $N_1(t)$ и $N_2(t)$ индивидуумов. Детерминированная модель определяется условиями

$$N_k(t+1) = \frac{\lambda_k}{q_k(t)} \cdot N_k(t) \quad (k = 1, 2), \qquad (1)$$

где $q_1(t) = 1 + \alpha_1 N_1(t) + \beta_1 N_2(t)$, $q_2(t) = 1 + \alpha_2 N_2(t) + \beta_2 N_1(t)$ (α_1, α_2, β_1, β_2 — положительные постоянные). Из (1) легко получается стационарное решение ($N_k(t+1) = N_k(t)$). В зависимости от величин $x = \beta_1\beta_2/\alpha_1\alpha_2$, $y = \beta_1(\lambda_2 - 1)/\alpha_2(\lambda_1 - 1)$ различаются три случая: устойчивое стационарное состояние, неустойчивое и исчезновение одного из видов. В работе рассматриваются упрощенные случайные модели, которые получаются добавлением к правым частям (1) независимых нормально распределенных случайных величин $z_k(t+1)$ с $Mz_k(t+1) = 0$. Дисперсия $z_k(t+1)$ выбирается в зависимости от предположения о скорости деления и гибели. Рассмотрены два крайних случая: 1) постоянная скорость деления; 2) постоянная скорость гибели. На машине получены реализации этих процессов. По реализациям вычисляются вероятности исчезновения одного из видов, совместное распределение (N_1N_2) в стационарном случае, сравнивается асимптотическое поведение детерминированной и случайной моделей. В. П. Чистяков

11 В210. Эволюция и кибернетика. Schmalhausen I. I. Evolution and cybernetics. «Evolution», 1960, **14**, № 4, 509—524 (англ.)

Эволюция популяции определяется двумя потоками информации. Генотипическое строение популяции (частота генов) дает прямой поток, а фенотипическое строение (частота вариантов) — обратный. Используя логарифмическую меру количества информации, определяется количество фенотипической и генотипической информации и скорость естественного отбора в гаплоидной и диплоидной популяции. Подробно обсуждаются механизмы передачи наследственной и фенотипической информации. Отмечаются аналогии с техникой связи.

О. М. Калинин

11 В211. О теоретико-вероятностном исследовании метеорологo-патологических явлений. Takács Lajos. Meteoropatológiai jelenségek valószínűségszámítási vizsgálatáról. «Magyar tud. akad. Mat. kutató int. közl.», 1958, 3, № 1-2, 129—140 (венг.; рез. русск., англ.)

Пусть в моменты $\{t_n\}$ происходят некоторые климатические явления, предполагается, что $t_n - t_{n-1}$ — независимые одинаково распределенные положительные случайные величины с функцией распределения $F(x)$. В моменты $\{u_l\}$ происходят некоторые биологические явления, процесс $\{u_l\}$—пуассоновский с плотностью μ. Рассматривается статистическая гипотеза о наличии влияния климатических явлений на биологические, которые происходят в окрестности радиуса α климатических явлений. За меру влияния принимается вероятность $P\{\nu_T \leqslant \nu^*_T\}$, где случайная величина ν_T — число биологических явлений, происшедших в промежутке времени $(0, T)$ в α-окрестности климатических явлений, а ν^*_T —

фактически наблюдаемое число биологических явлений за то же время. В связи с этим доказывается асимптотическая нормальность ν_T при $T \to \infty$. С. М. Броди

11 В212. О математической задаче, связанной с распределением вирусов. Reißig Gisela. Über ein mathematisches Problem der Virusforschung. «Forsch. und Fortschr.», 1958, **32**, № 4, 99—103 (нем.)

Каждый из v вирусов с равной вероятностью может попасть в одно из 8 яиц. Подсчитаны вероятности $w(v, k)$ заражения k яиц по крайней мере одним вирусом для $v = 1, \ldots, 20$. Аналогичные таблицы имеются также для некоторых других величин, например, для вероятностей различных распределений вирусов в яйцах, если известно, что заражено k яиц ($k < 8$).

С. С. Кислицын

11 В213. Классификационные процедуры, основанные на векторах двоичных ответов. Solomon Herbert. Classification procedures based on dichotomous response vectors. «Contribs Probability and Statist.» Stanford, Calif., Univ. Press, 1960, 414—423 (англ.)

Рассматриваются классификационные процедуры для психологической оценки, в какую из двух групп должен быть отнесен индивидуум, на основании ответов на предложенные вопросы. Наблюдаемой случайной величиной является вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $x_i = 0, 1$ («да», «нет»), n — число заданных вопросов. Исследуется возможность применения линейных, а также других простых статистик от x_i. Изложение ведется для $n = 4, 6$ на примере анкеты «Отношение к науке и научной карьере», проведенной среди учащихся.

Л. С. Трофименко

11 В214. Задачи в теории испытания умственных способностей, проистекающие из-за ошибок измерения. Lord Frederic M. Problems in mental test theory arising from errors of measurement. «J. Amer. Statist. Assoc.», 1959, **54**, № 286, 472—479 (англ.)

Изложение ведется на примере проверки грамотности. Испытуемому a предлагается написать набор из n слов; t_a из них («наблюдаемое значение») оказываются написанными правильно. Можно составить много наборов одинаковой сложности и предложить их испытуемому в достаточно короткий период времени («параллельные испытания»). При этом математическое ожидание τ_a наблюдаемых значений называется «истинным значением», величина $e_a = t_a - \tau_a$ — «ошибкой измерения». Можно считать, что t_a имеет нормальное распределение со средним τ_a и дисперсией σ^2, не зависящей от a. Если, однако, τ_a/n мало, удобнее считать распределение биномиальным. При испытании достаточно однородной группы лиц истинное значение предлагается оценивать с помощью регрессионного уравнения $\hat{\tau}_a - \mu_\tau = \beta_{\tau t}(t_a - \mu_t)$, где μ среднее по группе, $\beta_{\tau t}$ — коэффициент регрессии от истинного значения к наблюдаемому. Безусловное распределение наблюдаемого значения задается интегральным равенством

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) f(t \mid \tau)\, d\tau,$$

где $f(t \mid \tau)$ — распределение t_a при заданном τ_a. Обращая это равенство, можно найти распределение $g(\tau)$ истинного значения. В терминах двумерного распределения двух истинных значений формулируется проблема создания статистического критерия для решения следующего вопроса: измеряют ли два различных испытания одну или две различные психологические характеристики человека. В заключение указывается необходимость оценки разности истинных значений, измеренных в разное время (например, повышение грамотности через год обучения). А. Х. Заславский

11 В215. Модели для продолжительности реакции выбора. Stone Mervyn. Models for choicereaction time. «Psychometrika», 1960, **25**, № 3, 251—260 (англ.)

Индивид наблюдает независимые испытания случайной величины x, могущей иметь распределения вероятностей или $p_0(x)$, или $p_1(x)$, между которыми следует выбрать. Предполагается, что он действует оптимально, т. е. в соответствии с последовательным критерием отношения правдоподобия Вальда. В статье находятся соотношения между средними и дисперсиями объема выборки (времени реакции), величинами ошибок и априорными вероятностями. Аналогичные соотношения получены в ситуации с несколькими выборами и фиксированным объемом выборок. О. М. Калинин

11 В216. Максимальная допустимая ошибка в немногочисленных измерениях. Atánasiu M. Eroarea maximă admisibilă în măsurători pu'in numeroase. «Gaz. mat. şi fiz.», 1960, **A12**, № 12, 641—650 (рум.; рез. русск., франц.)

Автор кратко излагает результаты теории наименьших квадратов и условия применимости этой теории. Она неприменима в случае немногочисленных измерений и при использовании аппаратов с невысокой точностью. Автор устанавливает, что в этом случае только «максимальная допустимая ошибка», основанная на реальных возможностях аппаратов, правильно информирует о точности выполненных измерений.

По резюме автора

11 В217. Экономическая эффективность (рентабельность) экспериментирования. Finney D. J. The economic efficiency of experimentation. «Magyar tud. akad. Mat. kutató int. közl.», 1959, **4**, № 3-4, 203—224 (англ.; рез. венг., русск.)

Доклад, прочитанный на симпозиуме в Будапеште, посвящен вопросу о роли статистики при вопросах анализа результатов эксперимента и при планировании эксперимента. Речь идет о внутренней и о внешней экономии экспериментирования, т. е. о том, как следует планировать эксперимент, чтобы использовать имеющееся время, материал, работу с наибольшей выгодой, и о том, какими возможностями надо располагать для наиболее полного использования эксперимента. Рассматривается вопрос об определении оптимального числа исследуемых факторов, проблема конкомитантной (сопутствующей) информации, относящейся к определенным экспериментальным единицам; вопрос об определении необходимого количества экспериментов для определения данного фактора. Рассматривается случай, когда на основании некоторой предварительной информации и имеющихся данных надо либо принимать решение, либо определять количество экспериментов, необходимых для решения. Автор на двух примерах иллюстрирует вопрос об оптимальном планировании экспериментов, состоящих из последовательных ступеней (селекция вариантов выращиваемых растений и фильтрация химических препаратов). В. И. Бабкин

11 В218. Важная фаза в развитии экспериментальных наук. Hamaker H. C. Een belangrijke fase in de ontwikkeling van de experimentele wetenschap. «Statist. neerl.», 1961, **15**, № 1, 1—18 (гол., рез. англ.)

Очерк о роли приложений статистики в развитии экспериментальных наук. По резюме автора

11 В219. Библиография (1946—1960).— Bibliografie (1946—1960). «Statist. neerl.», 1961, **15**, № 1, 41—46 (гол.)

Перечисляются опубликованные в журнале «Statistica Neerlandica» **за период с 1946 по 1960 год статьи,** рецензии и доклады (350 назв.), посвященные применению статистики в медицине, биологии, психологии.

А. Х. Заславский

11 В220 К. Статистический контроль качества (Методы математической статистики в контроле качества промышленной продукции). Statisztikai minöségellenör-

zés. Az ipari minőségellenőrzés matematikai statisztikai módszerei. Szerk. Vincze István. Budapest, Közgazd. és Jogi Könyvk., 1958, 460 l., ill., 90 Ft. (венг.)

Книга представляет собой краткое руководство, содержащее основные сведения в области статистических методов контроля качества промышленной продукции; речь идет как о теоретических основах, так и о практических методах. Это работа группы авторов под руководством I. Vincze.

Введение (стр. 5—20; автор I. Vincze) дает обзор задач качественного контроля и показывает роль теории вероятностей в их решении. Часть I (стр. 21—122; K. Sarkadi, I. Vincze) — теоретические основы; суммирует элементарные правила обращения со статистическими данными, элементы теории вероятностей и математической статистики с точки зрения качественного контроля. Часть II полностью посвящена статистическим методам качественного контроля. Гл. 1 (стр. 23—190; B. A. Fontányi, É. Vas) касается статистических методов промышленного контроля. Практические советы, обработка данных, типы контрольных карт и их применение изучены как в случае качественного контроля, так и в случае измерений. Рассмотрен также случай непрерывного производства. Гл. 2 (стр. 191—270; K. Kollár) описывает статистические методы промышленного контроля: приводятся несколько методов взятия проб (взятие проб на качество и измерение) и их приложения. Часть III посвящена применениям качественного контроля. В гл. 1 (стр. 271—296; T. Tallián) речь идет об организации статистического промышленного контроля на фабриках, с точки зрения нужд промышленности Венгрии. В гл. 2 (стр. 297—350; T. Tallián) изучается качественный контроль в серийной продукции машиностроения: упоминаются методы наблюдения и статистические методы. Гл. 3 (стр. 351—404; M. Borbély) относится к статистическому контролю качества в текстильной промышленности. После краткого описания технологии текстильного производства автор рассматривает специфику применения качественного контроля в этой отрасли и его методы в случае однородного и неоднородного материалов. Рассмотрены также связанные с этим методы контрольных карт и методы исследования неоднородных нитей. Приложение состоит из двух частей. Первая (стр. 405—420, K. Sarkadi, I. Vincze) содержит математическое доказательство некоторых теорем, входящих в часть I; вторая (стр. 421—442) представляет собой ценную коллекцию таблиц, используемых в математической статистике, таблицы случайных чисел и таблиц, относящихся к методу контрольных карт (всего 13 таблиц). Книга вовсе не ставит своей целью доказательство теорем. Приложение может рассматриваться как иллюстрация рабочих методов теории вероятностей и математической статистики. Математическое содержание весьма элементарно. Приведены даже некоторые концепции из основ анализа, чтобы облегчить работу читателю, слабо знакомому с математикой. Несмотря на это, в разных частях книги освещены глубокие вопросы теории вероятностей и математической статистики (теория оценок, порядковые статистики, проверка гипотез, критерий Стьюдента, критерии согласия, включая критерий Колмогорова и Смирнова, критерий Джейри (Geary), $\varkappa^2$-критерий, критерий Кохрана (Cochren), F-критерий, критерий Бартлетта (Bartlett), дисперсионный анализ, корреляционный анализ, планирование выборки, последовательный анализ). Поэтому книга может также рассматриваться как справочник по математической статистике для математиков. Изложение ясное, но сжатое. Определения и теоремы в основном иллюстрированы примерами. Среди 70 рисунков в тексте можно найти много полезных графиков, таблиц и номограмм (16). Библиография содержит 72 названия и список 9 сборников таблиц (референт считает, однако, что упоминание книг по случайным процессам излишне). Будучи первой изданной в Венгрии монографией, посвященной качественному контролю, книга несомненно является результатом трудоемкой работы. Можно считать, что она достигает своей главной цели. Можно также надеяться, что она окажет ценную помощь тем, кто занимается теоретической и практической деятельностью в этой области. P. Medgyessy

11 В221 К. Прикладная теория статистических решений. Raiffa Howard, Schlaifer Robert/Osher/. Applied statistical decision theory. Boston, Mass., Harvard Univ. Graduate School Business Administrat., (Div. Res.); London, Bailey & Swinfen, 1961, xxviii, 356 pp., ill., 76 sh. «Brit. Nat. Bibliogr.», 1961, № 590, 12 (англ.)

ЧИСЛЕННЫЕ И ГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

Редактор *В. К. Саульев*

11 В222. Метод Рунге-Кутта для дифференциального уравнения $y'=f(x, y)$. Zanovello Renato. Sul metodo di Runge-Kutta per l'equazione differenziale $y'=f(x, y)$. «Rend. Seminar. mat. Univ. Padova», 1960, 30, № 2, 349—360 (итал.)

Предполагается, что функция $f(x, y)$ и ее производные до четвертого порядка включительно непрерывны в полосе $|x-x_0| \leqslant a$, $-\infty < y < \infty$, и

$$|f(x, y)| \leqslant M, \quad \left|\frac{\partial^l f(x, y)}{\partial x^l \partial y^i}\right| \leqslant M \ (0 < l \leqslant 4).$$

При этих ограничениях изучаются оценки ошибки приближенного решения дифференциального уравнения, указанного в заглавии, полученного методом Рунге-Кутта. Аналогично, как и в работе Бибербаха (Bieberbach L., Z. angew. Math. und Phys., 1951, 2, 233—248), автор получает оценку ошибки $\varepsilon \leqslant Ah^5$, где коэффициент A задается явно через M и не зависит от начальной точки (x_0, y_0). Так же дается оценка ошибки решения в точке x_0+h, полученного вычислением последовательно решения в точках

$$x_r = x_0 + r\frac{h}{n}, \text{ где } r = 1, 2, \ldots, n.$$

Указывается на некоторые другие условия, наложенные на $f(x, y)$, при которых метод оценки ошибки применим. Л. А. Янович

11 В223. Оптимизация шага в методе Рунге-Кутта при численном решении системы обыкновенных дифференциальных уравнений на электронно-счетных машинах. Ghelardoni G., Menconi M. Ottimizzazione del passo nel metodo di Runge e Kutta per la risoluzione numerica di un sistema di equazioni differenzilai ordinarie con l'uso di un calcolatore elettronico. «Giorn. mat. Battaglini», 1960, 88, № 1, 62—69 (итал.)

Рассматривается численное решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$y_i' = f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \ (i = 1, 2, \ldots, n),$$

имеющей единственное решение в некоторой окрестности и удовлетворяющей начальным условиям $y_i(x_0) = y_i^{(0)}$, методом Рунге-Кутта. Для решения $y_i(x_0+mh)$

в точке $x_0 + mh$, вычисленного с шагом $\frac{h}{2}$, получается приближенное значение величины ошибки $\varepsilon_1^{(i)} \approx \frac{\bar{y}_i - \bar{\bar{y}}_i}{15}$, где $\bar{\bar{y}}_i$ — значение решения в той же точке вычисленное с шагом h. Показывается, что если σ — наибольшая по модулю ошибка решения, даваемая методом Рунге-Кутта с шагом h, то при выборе шага $\bar{h}$ такого, что

$$\bar{h}^4 \leqslant \frac{\sigma h^4}{\max |k_l|} \text{ и } \bar{m}\bar{h} = mh,$$

где $\bar{m}$ — целое число, k_l — известные коэффициенты метода Рунге-Кутта, то приближенная ошибка $|\varepsilon_1^{(i)}| \leqslant \sigma$. Описывается схема программы решения указанной системы на счетной машине с учетом выбора шага для получения заданной точности, основанной на этой идее.

Л. А. Янович

11 В224. Коллокационная интерпретация метода Ритца. Тополянський Д. Б. Колокаційна інтерпретація метода Рітца. «Доповіді АН УРСР», 1961, № 3, 270—272 (укр.; рез. русск., англ.)

Вариационную задачу, эквивалентную краевой задаче для линейного самосопряженного дифференциального уравнения второго порядка на конечном интервале с однородными краевыми условиями, автор решает методом Ритца. Решение ищется в классе интерполяционных полиномов Эрмита порядка n, параметры-коэффициенты которого имеют различную коллокационную интерпретацию в зависимости от количества, способа расположения и порядка кратности узлов интерполяции.

Н. Я. Лященко

11 В225. Некоторые задачи на бесконечном промежутке. Мартьянова Р. А. «Уч. зап. Пермск. ун-т», 1959, 13, № 2, 75—94

Развитый в работах С. И. Мельника (РЖМат, 1954, 5276; 1957, 5942, 5943) метод осциллирующих функций применяется для приближенного решения краевых задач на промежутке $[a, \infty)$, $a \geqslant 0$. Рассматривается уравнение

$$L[y] \equiv y^{(n)} + p(x)\, y = f(x) \tag{1}$$

с условиями

$$R_k[y] \equiv \alpha_{1,k}\, y(a) + \alpha_{2,k}\, y'(a) + \ldots + \alpha_{n,k}\, y^{(n-l)}(a) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1), \tag{2}$$

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1}\, y^{(i-1)}\, \chi^{(i-1)}(x) = 0, \tag{3}$$

где $\alpha_{i,k}$ $(i = 1, 2, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots, n-1)$ — вещественные числа, матрица $\|\alpha_{ik}\|$ имеет ранг, равный $n-i$, функции $p(x)$ и $f(x)$ — измеримые, интегрируемые в каждом конечном промежутке $[a, l]$, $\chi(x)$ — решение уравнения $y^{(n)} + p(x)\, y = 0$, не удовлетворяющее условиям (2). Такого рода задача при $n = 2$, $f(x) \equiv 0$ и $p_1(x) = p(x) + \lambda$ рассматривалась М. Г. Крейном (Докл. АН СССР, 1950, 27, № 6). Рассматривается (при некоторых ограничениях относительно $p(x)$ и $f(x)$) сведение краевой задачи к задаче Коши и вопрос об устойчивости решения краевой задачи при изменении коэффициентов уравнения на осциллирующие функции. Дана оценка погрешности при приближенном решении краевой задачи. Указывается ряд приемов для решения нелинейных дифференциальных уравнений, рассмотренных Там Цой-Так (РЖМат, 1956, 8783); в частности, рекомендуется замена на частичных интервалах нелинейного уравнения линейным с последующим применением метода осциллирующих функций.

Д. Б. Тополянский

11 В226. Действие вращательной инерции и срезывающих деформаций на колебания балок, исследуемое с помощью приближенных методов Ритца и Галеркина. Huang T. C. Effect of rotatory inertia and shear on the vibration of beams treated by the approximate methods of Ritz and Galerkin. «Proc. 3rd U. S. Nat. Congr. Appl. Mechanics, Providence, Rhode Island, 1958.» New York, N. Y., 1958, 189—194 (англ.)

Кратко изложена методика расчета колебаний балок, подверженных действию вращательной инерции и поперечных срезывающих деформаций (модель балки Тимошенко). Расчет ведется путем приближенного решения соответствующего дифференциального уравнения с помощью методов Ритца и Галеркина. Показывается, что в исследуемом случае эти методы приводят к одному и тому же результату. Рассмотрен пример определения колебаний балки с применением метода Ритца. Библ. 14 назв.

Ю. М. Барабошкин

11 В227. Применение метода наискорейшего спуска к расчету тонкостенных стержней с переменной жесткостью. Деркачев А. А. «Докл. Акад. Фанхои РСС Точикистон, Докл. АН ТаджССР», 1959, 2, № 3, 3—6 (рез. тадж.)

Методом наискорейшего спуска (Канторович Л. В., Успехи матем. наук, 1948, 3, вып. 6) решается дифференциальное уравнение кручения тонкостенного стержня открытого профиля с переменной жесткостью

$$E[I_\omega(z)\,\theta'']' + G]I_k(z)\,\theta']' = m(z),$$

где $I_\omega(z)$ — переменная секториальная жесткость, $I_k(z)$ — жесткость чистого кручения, $m(z)$ — функция, характеризующая закон изменения распределенной крутящей нагрузки. Искомая функция $\theta(z)$ удовлетворяет различным краевым условиям при $z = 0$ и $z = 1$ в зависимости от способа закрепления концов.

М. К. Керимов

11 В228. Решение уравнения Даффина для подвижной пружинной системы с использованием метода Ритца — Галеркина с трехчленной аппроксимацией. Atkinson Cyril P., Bourne Charles P. The solution of Duffing's equation for the softening spring system using the Ritz — Galerkin method with a three term approximation. «Proc. 3rd U. S. Nat. Congr. Appl. Mechanics, Providence, Rhode Island, 1958». New York, N. Y., 1958, 71—77 (англ.)

Решается дифференциальное уравнение

$$\ddot{q} + q - \frac{4}{3} q^3 = F \cos \omega t. \tag{1}$$

Решение $q(t)$ представляется трехчленной приближенной формулой

$$q(t) = A \cos \omega t + B \cos 3\omega t + C \cos 5\omega t. \tag{2}$$

Коэффициенты A, B, C в выражении (2) определяются при решении уравнения (1) с помощью метода Ритца — Галеркина. Проводится исследование решения для случая свободных ($F = 0$) и вынужденных колебаний системы. Дается блок-схема программы, применявшейся при решении данной задачи на вычислительной машине ИБМ-701. Библ. 9 назв.

Ю. М. Барабошкин

11 В229. Численное решение уравнения Пуассона — Больцмана. Guggenheim E. A. The accurate numerical solution of the Poisson — Boltzmann equation. «Trans. Faraday Soc.», 1959, 55, № 10, 1714—1724 (англ.)

Методом, предложенным Мюллером (Müller, Phys. Z., 1927, 28, 324), получено численное решение уравнения

$$\frac{1}{x}\frac{d^2(x\varphi)}{dx^2} = \frac{\exp(\omega\varphi) - \exp(-z\varphi)}{z + \omega}$$

с краевым условием

$$x\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{zs}{a}.$$

Описана методика Мюллера и Гронвелла (Müller, Gronwall, Proc. Nat. Acad. Sci., 1927, 13, 19[illegible]). Проведено сравнение этих методов. Н. П. Жидков

11 В230. К приближенному интегрированию нелинейных дифференциальных уравнений колебательного движения с одной степенью свободы (Аннотация статьи, принятой к печати) Войлоков В. И. «Изв. высш. учебн. заведений. Математика», 1961, № 3, 98

11 В231. Численное решение линейных дифференциальных уравнений при помощи матрицы дифференцирования. Александров А. В. «Тр. Моск. ин-та инж. ж.-д. трансп.», 1961, вып. 131, 253—266

Излагается метод численного интегрирования линейных дифференциальных уравнений строительной механики с переменными коэффициентами при помощи матрицы дифференцирования D, которая переводит вектор функции $\mathbf{y}$ (с координатами $y_0, y_1, \ldots, y_n$) в вектор ее первой производной $\mathbf{y}'$ (с координатами $y_0', y_1', \ldots, y_n'$) по формуле

$$\mathbf{y}' = h\mathbf{y}_0' + D\mathbf{y}.$$

Выведены формулы для построения матрицы D при произвольной разбивке участка интегрирования от $x=0$ до $x=a_n$. При этом функция $y(x)$, подлежащая дифференцированию, аппроксимируется двумя полиномами по формуле $y(x) = y_0' H(x) + Q(x)$, где y_0' — значение производной от функции $y(x)$ в точке $x=0$;

$$H(x) = \frac{(-1)^n}{a_1 a_2 \ldots a_n} x(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n);$$

$$Q(x) = y_0[R_0(x) - R_0'(0)H(x)] +$$

$$+ y_1[R_1(x) - R_1'(0)H(x)] +$$

$$+ \ldots + y_n[R_n(x) - R_n'(0)H(x)],$$

где $R_i(x)$ $(i=0, 1, \ldots, n)$ — полиномы Лагранжа. Указанная аппроксимация применяется для выражения векторов старших производных через вектор функции $\mathbf{y}$ и начальные параметры $y_0', y_0'', \ldots, y_0^{(m)}$. Записывая линейное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами в матричной форме, автор сводит задачу к системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $y_0, y_1, \ldots, y_n$. С целью пояснения изложенного и для оценки точности рассматриваемого метода приводится расчет критической нагрузки, приходящейся на единицу периметра, для круглой пластинки постоянной толщины с защемленными краями. И. Ф. Шелихова

11 В232. Итерационный метод переменных направлений для слабо нелинейных эллиптических разностных уравнений. Douglas Jim, Jr. Alternating direction iteration for mildly nonlinear elliptic difference equations. «Numer. Math.», 1961, 3, № 2, 92—98 (англ.)

Уравнение

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = Q(x, y, U),$$

где $0 < m \leqslant \frac{\partial Q}{\partial U} = q(x, y, U) \leqslant M < \infty$, с краевыми условиями первого рода на границе единичного квадрата аппроксимируется при помощи обычного сеточного уравнения

$$(\Delta_x^2 + \Delta_y^2) w_{ij} = Q(x_i, y_j, w_{ij}).$$

Автор устанавливает сходимость итераций

$$(\Delta_x^2 + \Delta_y^2) w_{ij}^{n+1} - A w_{ij}^{n+1} = Q(x_i, y_j, w_{ij}^n) - A w_{ij}^{(n)},$$

где $A = \frac{1}{2}(M+m)$ для решения системы (1). При этом для внутренних итераций используется итерационный метод переменных направлений. Исследование проведено как в смысле метрики пространства C, так и в смысле метрики пространства L_2. В первом случае общее число операций, необходимых для получения равномерно хорошей аппроксимации к решению системы (1), равно $O(h^{-2}\ln^2 h)$. Во втором случае это число меньше на множитель $\ln h$ и от функции Q не требуется положительности. В. К. Саульев

11 В233. Некоторые численные эксперименты решения методом Ньютона нелинейных параболических и эллиптических краевых задач. Bellman Richard, Juncosa Mario L., Kalaba Robert. Some numerical experiments using Newton's method for nonlinear parabolic and elliptic boundary — value problems. «Communs Assoc. Comput. Mach.», 1961, 4, № 4, 187—191 (англ.)

Дифференциальное уравнение

$$Lu = f(u),$$

где Lu — линейный оператор, а $f(u)$ — дифференцируемая функция решается обычным методом последовательных приближений (методом Пикара)

$$Lu^{(k+1)} = f(u^{(k)}) \qquad (1)$$

и методом Ньютона

$$Lu^{(k+1)} - f'(u^{(k)})u^{(k+1)} = f(u^{(k)}) - u^{(k)}f'(u^{(k)}). \qquad (2)$$

На числовых примерах $Lu = u_t - u_{xx}$, $f(u) = (1+u^2)(1-2u)$ и $Lu = u_{xx} + u_{yy}$, $f(u) = u^2$ проводится сравнение эффективности методов (1) и (2). В результате авторы приходят к выводу, что для решения краевых задач с большими градиентами решения выгоднее использовать метод Ньютона (2). В. К. Саульев

11 В234. Об одном итерационном способе решения систем конечноразностных уравнений. Дьяконов Е. Г. «Докл. АН СССР», 1961, 138, № 3, 522—525

Строится итерационный метод решения систем конечноразностных уравнений, аппроксимирующих уравнения эллиптического типа $2m$-го порядка, который требует для нахождения решения системы с точностью ε числа арифметических действий $\asymp \frac{\ln^2 h}{h^2}\ln\varepsilon$, где h — шаг сетки. Лучшая асимптотика достигалась ранее только для более узких классов задач.

11 В235. Метод переменных направлений решения систем конечноразностных уравнений. Дьяконов Е. Г. «Докл. АН СССР», 1961, 138, № 2, 271—274

Устанавливается сходимость итерационного метода переменных направлений для первой краевой задачи в прямоугольнике для самосопряженных эллиптических уравнений четвертого порядка. Для уравнений с разделяющимися переменными дается оценка скорости сходимости.

11 В236. Аппроксимация в уравнениях с частными производными. Collatz Lothar. Approximation in partial differential equations. «On Numerical Approximat. Madison, Univ. Wisconsin Press», 1959, 413—422 (англ.)

Для решения граничных задач предлагается использовать чебышевские приближения. Для эллиптического уравнения $Lu = r$, например, подбираются функции v_k, $k=0, 1, 2, \ldots$, так, чтобы $Lv_0 = r$, $Lv_k = 0$, $k=1, 2, \ldots$,

и ищется линейная комбинация $\sum_{k=0}^{n} a_k v_k$, дающая равномерное приближение граничных условий. Аналогичная идея пригодится и для некоторых линейных и нелинейных уравнений других типов. При этом удается получить оценку погрешности. Н. П. Жидков

11 В237. Об устойчивости вычислительных алгорифмов приближенного решения краевых задач для дифференциальных уравнений методом конечных разностей. Бондаренко П. С. Про стійкість обчислювальних алгорифмів наближеного розв'язування крайових задач для диференціальних рівнянь методом скінченних різниць. «Доповіді АН УРСР», 1961, № 4, 415—419 (укр.; рез. русск., англ.)

Вводятся понятия вычислительного и реального вычислительного алгорифмов решения методом конечных разностей краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных, а также приближенного и реального приближенного решений этих задач, найденных по вычислительным алгорифмам. Исследована устойчивость реального вычислительного алгорифма и область этой устойчивости. Устанавливается достаточно широкий класс реальных вычислительных алгорифмов, для которых априори можно указать область устойчивости. Дается оценка погрешности реального приближенного решения краевой задачи. И. Ф. Шелихова

11 В238. Определение оптимального множителя ускорения для метода последовательной верхней релаксации. Carre B. A. The determination of the optimum accelerating factor for successive over — relaxation. «Comput. J.», 1961, 4, № 1, 73—78 (англ.)

Предлагается следующий приближенный метод для определения оптимального значения $\alpha_{опт}$ множителя ускорения сходимости в методе последовательной верхней релаксации

$$x^{(k)} = Mx^{(k-1)} + c,$$

где $M = -(\alpha L + E)^{-1}[\alpha L' + (\alpha - 1)E]$, $c = (\alpha^{-1}E + L)^{-1}b$, используемого для решения системы линейных алгебраических уравнений $Ax = b$, $(A = L + L'$, L — нижняя треугольная матрица, L' — верхняя треугольная матрица). Сначала, используя значение α, большее чем 1, но меньшее, чем $\alpha_{опт}$, например, $\alpha = 1{,}375$, совершают несколько, например 12, итераций для получения λ_{max} матрицы M. Затем по формуле

$$\alpha_e = 2\left\{1 + \sqrt{1 - (\lambda_{max} + \alpha - 1)^2 / \lambda_{max}\,\alpha^2}\right\}^{-1}$$

определяют α_e и по формуле

$$\alpha_m = \alpha_e - (2 - \alpha_e)/4$$

определяют $\alpha_m < \alpha_{опт}$. Используя значение $\alpha = \alpha_m$, повторяют процесс, пока два последовательных значения α_e не совпадут в пределах заданной точности. Автор кратко останавливается также на вопросе оценки точности решения на каждом шагу. В. К. Саульев

11 В239. Практический метод определения оптимального множителя релаксации в методе последовательной верхней релаксации. Kulsrud H. E. A practical technique for the determination of the optimum relaxation factor of the successive over — relaxation method. «Communs Assoc. Comput. Mach.», 1961, 4, № 4, 184—187 (англ.)

Определение оптимального множителя релаксации (оптимального множителя ускорения сходимости итерационного процесса) ω_b в методе последовательной верхней релаксации

$$u^{(k+1)} = L_{\sigma,\omega}u^{(k)} + f \qquad (1)$$

автор рекомендует осуществлять постепенно, одновременно с решением системы (1). Именно сначала определяют λ из формулы

$$\frac{\|u^{(k)} - u^{(k-1)}\|}{\|u^{(k-1)} - u^{(k-2)}\|} \approx |\lambda|.$$

Затем по формуле $\mu^2 = (\lambda + \omega - 1)^2/\omega^2\lambda$ вычисляют μ^2 и, наконец, по формуле $\omega_b = 2(1 + \sqrt{1 - \mu^2})^{-1}$ определяют улучшенное приближенное значение ω_b. Затем процесс повторяется. Этот метод вычисления ω_b сравнивается на конкретных числовых примерах с другими методами определения ω_b. В. К. Саульев

11 В240. К вопросу о применении метода последовательных приближений при решении разностных аппроксимаций бигармонических уравнений. Лапушкін І. Т. До питання застосування методу послідовних наближень при розв'язуванні різницевих апроксимацій бігармонічних рівнянь. «Доповіді АН УРСР», 1961, № 3, 278—281 (укр.; рез. русск., англ.)

Решая в конечной области G бигармоническое уравнение при определенных краевых условиях на границе Γ области G конечноразностным методом с квадратной или треугольной сеткой, автор указывает два приема преобразования получающихся при этом систем конечноразностных уравнений к новым, обладающим тем свойством, что собственные значения соответствующих матриц по абсолютной величине не превышают 1. Указывается аппроксимационная формула для бигармонического уравнения на треугольных сетках такая, что собственные значения λ, соответствующей матрицы, удовлетворяют неравенству $|\lambda| \leqslant 1$. Обсуждаемые аппроксимационные формулы применялись при расчете явления прогиба и напряженного состояния пластинок на вычислительных машинах СЕЛМ и «Киев». Н. Я. Лященко

11 В241. Точность и применимость вариационного и разностного решений уравнений диффузии теории реакторов. Ackroyd R. T., Perks M. A. Accuracy and scope of variational and difference solutions of the diffusion equations of reactor theory. «J. Nucl. Energy», 1959, A10, № 3-4, 141—146 (англ.)

Рассматривается вариационный метод решения задачи на собственные значения для системы уравнений

$$\nabla^2\psi_1 + \lambda^2\psi_1 = 0,$$

$$\nabla^2\psi_2 - \mu^2\psi_2 = 0$$

с условием сшивки $\psi_1 = \psi_2$,

$$D_1\frac{\partial\psi_1}{\partial n} = D_2\frac{\partial\psi_2}{\partial n}$$

(μ^2, D_1, D_2 — заданные величины, λ^2 — искомое собственное значение). Указываются преимущества этого метода (бо́льшая точность) по сравнению с методом сеток.

11 В242. Метод конечных разностей для краевых задач, содержащих собственное значение в граничном условии. Ehrligh Louis W., Riley James D., Strang W. Gilbert, Troesch B. Andreas. Finite — difference techniques for a boundary problem with an eigenvalue in a boundary condition. «J. Soc. Industr. and Appl. Math.», 1961, 9, № 1, 149—164 (англ.)

В области R, ограниченной отрезком оси r $(0 < r < L)$, отрезком оси z $(0 < z < -d)$ и непрерывной, кусочно-регулярной, простой кривой C, соединяющей точки $(L, 0)$ и $(0, -d)$ и находящейся в четвертом квадранте, рассматривается следующая краевая задача

$$\varphi_{rr} + \varphi_{zz} + \frac{1}{r}\varphi_r - \frac{1}{r^2}\varphi = 0 \quad \text{в } R, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \quad \text{на } C, \qquad (2)$$

$$\varphi(0, z) = 0 \quad \text{для } -d \leqslant z \leqslant 0, \qquad (3)$$

$$\varphi_z = \lambda\varphi(r, 0) \quad \text{для } 0 \leqslant r \leqslant L. \qquad (4)$$

Собственный параметр λ входит в краевое условие (4). Рассматриваются несколько методов для приближенного нахождения первого собственного значения задачи (1) — (4). Наиболее подробно исследованы метод конечных разностей и метод Ритца. При некоторых предположениях доказывается сходимость $\lambda^{(h)}$ к λ при $h \to 0$, где $\lambda^{(h)}$ — собственное значение сеточной задачи, аппроксимирующей данную задачу (1) — (4). Отмечается, в частности, что эта задача имеет N собственных значений, где N — число узлов сетки на отрезке $0 \leqslant r \leqslant L$. Библ. 12 назв. В. К. Саульев

11 В243. О приближенном решении задачи Дирихле для уравнения струны. Вахания Н. Н. «Гамотвлиты центрис шромеби. Мицниеребата Академиа Сакартвелос ССР. Тр. Вычисл. центра АН ГрузССР», 1960, 1, 41—49

Рассматривается решение уравнения струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad (1)$$

удовлетворяющее краевому условию

$$u \mid_{\Gamma_R} = f,$$

где Γ_R — граница области R, f — непрерывная на Γ_R функция. Известно, что характер решения зависит от вида области R. В рассматриваемом случае область R является прямоугольником $0 \leqslant x \leqslant L_1$, $0 \leqslant y \leqslant L_2$. Для уравнения (1) строится приближенное решение. Исследуется его характер при рациональных и иррациональных значениях числа $\rho = \frac{L_1}{L_2} = \frac{m}{n}$, где m, n — несократимые целые числа. Ю. М. Барабошкин

11 В244. О распространении ошибок округления при численном интегрировании уравнения теплопроводности. Lowan Arnold N. On the propagation of round — off errors in the numerical integration of the heat equation. «Math. Comput.», 1960, 14, № 70, 139—146 (англ.)

При нахождении решения разностных схем возникают ошибки, связанные с алгорифмом решения и с тем, что вычисления ведутся с какой-то определенной точностью. Эта точность обычно определяется числом значащих цифр, с которым ведутся вычисления и задаются коэффициенты разностных схем, и числом действий, необходимых для решения разностных уравнений с заданной точностью. В статье даются оценки ошибок, возникающих от округлений при решении разностных схем для уравнения теплопроводности. С этой точки зрения исследуются явная схема, схема Кранка — Николсона, методы итераций и прогонки для решения неявных схем. Приведены формулы оценок. В. И. Лебедев

11 В245. Распространение тепла в изолированной сферической оболочке с произвольными сферически симметричными источниками. Wilkins J. Ernest, Jr. Conduction of heat in an insulated spherical shell with arbitrary spherically symmetric sources. «SIAM Rev.», 1959, 1, № 2, 149—153 (англ.)

С помощью преобразования Лапласа получено асимптотическое разложение для решения следующей задачи:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{f(r)}{r} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial \theta},$$

$$T(r, 0) = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial r} = 0 \text{ при } r = r_1 \text{ и } r_2.$$

Н. П. Жидков

11 В246. Метод прямых для решения одной нелинейной краевой задачи в области с криволинейной границей. Горбунов А. Д., Будак Б. М. «Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем., механ., астрон., физ., химии», 1958, № 3, 3—12

Методом прямых решается следующая задача. Найти непрерывно дифференцируемое решение уравнения

$$u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y),$$

правая часть которого определена и непрерывна по совокупности всех аргументов и удовлетворяет условию Липшица с константой L_1 по u_x и u_y в замкнутой области $\bar{G}$: $0 \leqslant x \leqslant l_x$, $g(x) \leqslant y \leqslant l_y$, $|u| \leqslant l_u$, $|u_x| \leqslant l_{u_x}$, $|u_y| \leqslant l_{u_y}$, где $g'(x) \geqslant 0$ при $0 \leqslant x \leqslant l_x$, $g(0) = 0$ и $g'(x)$ непрерывна, удовлетворяющее граничным условиям $u(x, g(x)) = \varphi(x)$, $0 \leqslant x \leqslant l_x$; $u(0, y) = \psi(y)$, $0 \leqslant y \leqslant l_y$. $\varphi'(x)$ и $\psi'(y)$ непрерывны. Н. П. Жидков

11 В247. Применение метода типа Галеркина для исследования развития возмущений течения вязкой жидкости в плоском канале. Комаров А. М. «Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем., механ., астрон., физ., химии», 1959, № 2, 55—59

Рассматривается плоское движение вязкой жидкости в канале шириной h, образованном двумя прямыми параллельными стенками. На основное движение накладывается двумерное возмущающее движение. Предполагается, что основное и возмущающее движения подчинены уравнениям Навье — Стокса. Решение уравнения для возмущенного движения ищется в виде

$$\psi_n = \sum_{k=1}^{n} a_k(t)\, \chi_k(x, y),$$

где $\{\chi_k(x, y)\}$ — некоторая полная система функций. Для коэффициентов $a_k(t)$ по методу Галеркина получена система обыкновенных дифференциальных уравнений. Решив ее, получаем ψ_n. Последовательность ψ_n сходится к обобщенному решению уравнения для возмущенного движения. Н. П. Жидков

11 В248. Применение метода хорд к уравнениям тепловой конвекции в случае пространственной задачи. Драхлин Е. Х. «Сб. научн. тр. Пермск. горн. ин-т», 1959, № 4, 99—113

Система уравнений, описывающая свободную стационарную тепловую конвекцию в некоторой полости ω, ограниченной замкнутой поверхностью S_0, решается методом хорд. Вводится вектор $\Phi(x, y, z)$ с компонентами, принадлежащими пространству непрерывных функций $C(\omega)$ вместе со всеми своими производными до четвертого порядка включительно, и функция $\Theta(x, y, z)$, принадлежащая $C(\omega)$ вместе со всеми своими частными производными первого порядка. К исходному уравнению применяется операция ротора и осуществляется переход к системе четырех уравнений в безразмерных переменных. При допущении, что в области ω существуют функции Грина первой краевой задачи для уравнений Лапласа и бигармонического, полученная система сводится к системе семи интегро-дифференциальных уравнений. К последней применяется модифицированный метод хорд, причем последовательные приближения находятся по формуле:

$$x_{n+1} = x_n - \Phi_0 f(x_n)\,(a - x_0).$$

Доказывается, что в модифицированном процессе метода хорд имеет место сходимость последовательных приближений к решению первого дифференциального уравнения и это решение единственно при некоторых условиях.

И. Ф. Шелихова

11 В249. К приближенному решению уравнений тепловой конвекции. Вертгейм Б. А. «Сб. научн. тр. Пермск. горн. ин-т», 1959, № 4, 67—78

Излагается решение плоской задачи о стационарной конвекции в однородной жидкости, заполняющей горизонтальную цилиндрическую область, причем задан температурный режим на границе. Для выяснения возможностей применения метода Ньютона с целью установления области сходимости приближенного способа реше-

ния задачи рассмотрен случай, когда данная область есть круг, а температурный режим на контуре дает в отсутствие конвекции линейное распределение температуры. Задача приводится к системе нелинейных интегральных уравнений, которую рассматривают как функциональное уравнение в функциональном пространстве типа Банаха. Вычисления могут быть сведены к решению гармонического и бигармонического уравнений в круге или могут применяться разные формы модифицированного процесса последовательных приближений Ньютона. Доказывается сходимость последовательных приближений к решению функционального уравнения. Дается оценка норм интегральных операторов, связанных с функциями Грина. И. Ф. Шелихова

11 В250. Численное решение задачи Коши для одного класса линейных интегро-дифференциальных уравнений (Аннотация статьи, принятой к печати). Назаренко Т. И. «Изв. высш. учебн. заведений. Математика», 1961, № 3, 147

11 В251. К вопросу об ускорении сходимости итерационных процессов при приближенном решении линейных операторных уравнений. Буледза А. В. До питання про прискорення збіжності ітеративних процесів при наближеному розв'язуванні лінійних операторних рівнянь. «Доповіді АН УРСР», 1961, № 3, 265—269 (укр.; рез. русск., англ.)

Для решения в гильбертовом пространстве H уравнения

$$Ax = y,$$

где A — линейный оператор, переводящий H в себя, существует A^{-1}, спектр S_A оператора A находится в интервале (m, M) действительной оси, автор строит итерационный процесс в соответствии с формулой

$$x_m = \sum_{i=1}^{q} [a_i x_{m-i} + \varphi_i(A)(Ax_{m-i} - y)], \qquad (1)$$

где $x_0, x_1, \ldots, x_{q-1}$ — произвольные элементы пространства H, a_i $(i = 1, \ldots, q)$ — некоторые параметры, $\varphi_i(\rho)$ $(i = 1, \ldots, q)$ — действительные функции, определенные и непрерывные на (m, M). Необходимые и достаточные условия сходимости процесса (1) при каком-либо y и произвольных $x_0, \ldots, x_{q-1}$ даются соотношениями: $\sum_{i=1}^{q} a_i = 1$ и $\max_{\rho \in S_A} |\lambda_s| < 1$, где λ_s — корни уравнения

$$\lambda_s^q - \sum_{i=1}^{q} [a_i + \varphi_i(\rho)\rho]\lambda_s^{q-i} = 0,$$

а ρ — собственные значения оператора A. Полученное предложение применяется к построению итерационного процесса с ускоренной сходимостью для приближенного решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода с симметричным ядром. Н. Я. Ляшенко

11 В252. Приближенное решение интегро-дифференциальных уравнений методом хорд, построенных по узлам Чебышева. Дерендяев И. М. «Сб. научн. тр. Пермск. горн. ин-т», 1959, № 5, 111—117

Для решения интегро-дифференциальных уравнений применяется метод хорд со специальным выбором узлов интерполяции. А именно, за x_0, x_1, принимаются нули квадратного полинома Чебышева. Доказывается лемма, позволяющая оценить погрешность линейного полинома, построенного по узлам Чебышева. Дается оценка скорости сходимости последовательных приближений к решению. Рассматриваемый метод может быть применен к решению всех классов нелинейных уравнений, которые решаются методами Ньютона и Чаплыгина. Он содержит более слабые требования по сравнению с методом Ньютона. Благодаря этому облегчается подбор начальных приближений, и метод может применяться в комбинации с методом Ньютона как первый шаг в вычислениях. И. Ф. Шелихова

11 В253. Об ошибках округлений при численном решении систем совместных линейных алгебраических уравнений методом Холецкого и методом главных элементов. Тан Чжэнь. «Докл. АН СССР», 1961, 137, № 5, 1071—1073

Получаются оценки невязок, возникающих из-за ошибок округления при решении линейных алгебраических систем с симметрической матрицей A методом Холецкого на счетных машинах с плавающей запятой, работающих в двоичной системе с λ двоичными разрядами. Причем предполагается, что разность между точными арифметическими операциями, операцией извлечения корня и соответствующими псевдооперациями равна точному значению этих операций, умноженному на ε_i, где $|\varepsilon_i| \leqslant 2^{-\lambda}$. Приводится пример системы пятого порядка с симметрической матрицей, решенной на машине «Стрела» методами Холецкого и главных элементов, из которого видно, что точность первого метода несколько ниже, чем второго, что не соответствует утверждениям некоторых авторов о том, что метод Холецкого для симметрических матриц более точный, чем другие. Л. А. Янович

11 В254. К решению трехчленных линейных уравнений. Жестков С. В. «Сб. научн. тр. Ленингр. инж.-строит ин-т», 1959, вып. 30, 247—255

Для решения системы линейных алгебраических уравнений предлагается один из вариантов метода исключения Гаусса. Дается также основанный на физических соображениях вывод формул Крамера. В. Л. Загускин

11 В255. Метод Класена для решения системы линейных уравнений. Gloden A. Clasen's method for the solution of a system of linear equations. «Scripta Math.», 1960, 25, № 3, 243—246 (англ.)

Излагается метод, предложенный Класеном в 1889 г. Метод близок по форме вычислений к одному из вариантов метода Гаусса («схема умножения и вычитания» по терминологии Д. К. Фадеева и В. Н. Фадеевой (РЖМат, 1961, 10В319 К, стр. 152)) и отличается тем, что матрица системы приводится с помощью элементарных преобразований не к треугольному, а непосредственно к диагональному виду. В. Л. Загускин

11 В256. О численном решении систем линейных уравнений. Jankó Bela. Despre rezolvarea numerică a sistemelor de ecuaţii liniare. «Studii şi cercetări mat. Acad. RPR Fil. Cluj», 1960, 11, № 1, 79—83 (рум.; рез. русск., франц.)

Рассматриваются условия сходимости обобщенного итерационного метода (частными случаями которого являются методы Якоби и Зейделя) в полуупорядоченном пространстве.

11 В257. Чебышевские полуитерационные методы, итерационные методы последовательной верхней релаксации, итерационные методы Ричардсона второго порядка. Golub Gene H., Varga Richard S. Chebyshev semi — iterative methods, successive overrelaxation iterative methods, and second order Richardson iterative methods. «Numer. Math.», 1961, 3, № 2, 147—156 (англ.)

Рассматривается решение системы линейных алгебраических уравнений $Ax = b$ или

$$x = Bx + g, \qquad (1)$$

где A — симметрическая, положительно определенная матрица. Показывается, что все три указанных в заглавии статьи итерационных метода, в случае выбора соответствующих параметров оптимальными, в некотором смысле подобны. При этом в случае метода последовательной верхней релаксации, если матрица B не являет-

ся циклической, вместо (1) рассматривается следующая система матричных уравнений

$$x = By + g,$$
$$y = Bx + g,$$

где матрица $\begin{pmatrix} 0 & B \\ B & 0 \end{pmatrix}$ является уже циклической. Более тонкие исследования приводят авторов к выводу, что чебышевский полуитерационный метод в модификации авторов

$$x^{(l+1)} = \omega_{l+1}(Bx^{(l)} + g - x^{(l-1)}) + x^{(l-1)},\ l \geqslant 1,$$

где

$$\omega_{l+1} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\rho^2\omega_l}{4}\right)},\ l \geqslant 2,\ \omega_1 = 1,\ \omega_2 = \frac{2}{2 - \rho^2},$$

ρ — спектральный радиус матрицы B имеет по сравнению с другими двумя рассматриваемыми методами наименьшую спектральную норму соответствующей итерационной матрицы. В продолжении этой статьи авторы обещают рассмотреть новый итерационный метод — циклический чебышевский полуитерационный метод.

В. К. Саульев

11 В258. О методе последовательной верхней релаксации для циклических операторов. Kjellberg Göran. On the successive over—relaxation method for cyclic operators. «Numer. Math.», 1961, **3**, № 2, 87—91 (англ.)

Пусть $x = Bx + d$ — система линейных алгебраических уравнений с квадратной матрицей. Автор рассматривает следующий итерационный метод для ее решения

$$x^{m+1} = x^m + \omega(Lx^{m+1} + Ux^m + d - x^m),$$

где L — нижняя треугольная матрица, U — верхняя треугольная матрица ($B = L + U$), ω — множитель релаксации. Основной результат автора заключается в следующей теореме: Пусть R означает векторное пространство, являющееся прямой суммой пространств $v_1, v_2, \ldots, v_m$, и пусть $B(B = L + U)$ означает ограниченный линейный оператор из R в R, причем $Lv_i \subset v_{i+h}$, $Uv_i \subset v_{i-k} (i = 1, 2, \ldots, m)$, где h и k — положительные целые, $h + k = p$. Тогда если $\lambda \neq 0$ является собственным значением матрицы

$$T(\omega) = (E - \omega L)^{-1}(E(1 - \omega) + \omega U),$$

то каждое μ, удовлетворяющее соотношению

$$(\lambda + \omega - 1)^p = \omega^p \lambda^k \mu^p, \qquad (1)$$

является собственным значением B и, наоборот, если μ является собственным значением B, каждое λ, удовлетворяющее (1), есть собственное значение $T(\omega)$. Этот результат обобщает соответствующие результаты Янга ($p = 1$) и Варга ($p = 2$).

В. К. Саульев

11 В259. Новый метод ускорения для двумерной аппроксимации диффузии. Nakayama T. A new acceleration method for two — dimensional diffusion approximation. «Codes Reactor Computat». Vienna, 1961, 485—493. Discuss., 495—505 (англ.; рез. франц., русск., исп.)

Для решения системы линейных алгебраических уравнений $u = Bu + F$ с квадратной неособенной матрицей B, возникающей при решении методом сеток краевой задачи для уравнения диффузии, автор предлагает использовать итерационный процесс

$$u^{(k+1)} = \frac{u^{\left(k+\frac{1}{2}\right)} - \lambda u^{(k)}}{1 - \lambda},\quad u^{\left(k+\frac{1}{2}\right)} = Bu^{(k)} + F, \qquad (1)$$

где λ — наибольшее по модулю собственное значение матрицы B. Вывод экстраполяционной формулы (1) основан на формуле $u^{(k)} \approx u + C\lambda^{(k)}$, выражающей асимптотическое при $k \to \infty$ поведение погрешности $u^{(k)} - u$.

Примечание референта. Формула (1) впервые выведена Л. А. Люстерником (Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1947, 20, 49—64). В. К. Саульев

11 В260. Вычисление собственных значений матриц с комплексными элементами. Durand Emile. Recherche des valeurs propres d'une matrice à éléments complexes, par une méthode de triangularisation. «C. r. Acad. sci.», 1961, 252, № 9, 1267—1269 (франц.)

Для определения собственных значений комплексной матрицы A применяется метод, основанный на ее приведении к нижней диагональной форме C серией преобразований типа $T^{-1}AT$ по формуле

$$c_{pq} = -\{\mu^2 a_{qp} - (a_{pp} - a_{qq})\mu - a_{pq}\},$$

где

$$\mu = \frac{-2a_{pq}}{(a_{pp} - a_{qq}) \pm \sqrt{(a_{pp} - a_{qq}) + 4a_{pq}a_{qp}}}$$

(знак перед корнем выбирается из условия максимума знаменателя). Искомые собственные значения являются элементами главной диагонали матрицы C. При проведении вычислений с 8 значащими цифрами для контроля используется формула вида:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} |a_{ii}^{(k+1)} - a_{ii}^{(k)}|}{\sum_{i=1}^{n} |a_{ii}^{(k+1)}|} \leqslant 10^{-7}.$$

Условия сходимости не исследуются. Сообщается, что указанным методом вычислялись матрицы порядка 20 на ИБМ-650. Приведен числовой пример. И. Ф. Шелихова

11 В261. Границы для P-меры обусловленности матрицы с положительными корнями. Davis Philip J., Haynsworth Emilie V., Marcus Marvin. Bound for the P-condition number of matrices with positive roots. «J. Res. Nat. Bur. Standards», 1961, **B65**, № 1, 13—14 (англ.)

Пусть $A = \{a_{ij}\}$ — матрица с положительными собственными значениями $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ и пусть полином

$$p(x) = x^n - c_1x^{n-1} + c_2x^{n-2} - \ldots + (-1)^n c_n,\ c_i \geqslant 0$$

является ее характеристическим полиномом. Авторы для меры обусловленности $P = \lambda_n/\lambda_1$ получают следующие неравенства

$$\frac{1}{D_k^{1/(n-1)}} \leqslant P \leqslant \frac{1 + \sqrt{1 - D_k^{n-1}}}{1 - \sqrt{1 - D_k^{n-1}}} \qquad (1)$$

($k = 1, 2, \ldots, n-1$), где

$$D_k = \left(\frac{n}{k}\right)^{n/k} c_n c_k^{-n/k}.$$

В случае $k=1$ второе неравенство в (1) можно улучшить:

$$P \leqslant \frac{1 + \sqrt{1 - D_1}}{1 - \sqrt{1 - D_1}},\quad D_1 = \frac{n^k c_n}{c_1^n}.$$

В. К. Саульев

11 В262. Обобщенный алгорифм Гаусса в уравнительных вычислениях. Krastiņš A. Vispārinātais gausa algoritms izlīdzināšanas rekinos. «Latv. lauksaimniecības akad. raksti, Тр. Латв. с.-х. акад.», 1959, вып. 8, 299—305 (лат.; рез. русск.)

Поставлена цель — математически обосновать высказывание проф. А. И. Мазмишвили о том, что уравновешивание по методу двух, трех и более групп легко обобщить с точки зрения треугольного преобразования квадратной симметричной блочной матрицы. Задача решается применением обобщенного алгорифма Гаусса.

Резюме автора

11 В263. О применении метода наименьших квадратов к выравниванию экспериментальных кривых. Juricic Henri. Sur l'application de la méthode des moindres carrés au lissage des courbes expérimentales. «Publs scient. et techn. Ministère air», 1959, N N. T. 80, 55—82 (франц.)

Излагаются вопросы, связанные с обработкой экспериментальных данных, и, в частности, с задачей представления экспериментальных кривых с помощью аналитических выражений. Даются рекомендации по практическому применению метода выравнивания экспериментальных кривых, основанного на методе наименьших квадратов. Аналитические выражения представляются в таком виде, чтобы подлежащие определению коэффициенты этих выражений были независимы между собой. Обсуждается вопрос о выборе оптимального числа параметров рассматриваемых аналитических представлений. Отмечается необходимость изменения весов экспериментальных точек при применении преобразований. Приведены числовые примеры. И. Ф. Шелихова

11 В264. О нахождении линейной зависимости по способу наименьших квадратов. Медведев Г. А. «Тр. Дальневост. техн. ин-та рыбн. пром-сти и х-ва», 1960, вып. 1, 105—106

При нахождении линейной зависимости для данной совокупности n пар значений переменных X и Y так, чтобы сумма квадратов отклонений была наименьшей, отклонения могут отсчитываться «по вертикали» (по оси Y), что приводит к выражению $K_1 = B/A$; «по горизонтали» (по оси X), тогда $K_2 = C/B$ и по перпендикулярам к искомой прямой из табличных точек, тогда

$$K_3 = \frac{2B}{\sqrt{(C-A)^2 + 4B^2} - (C-A)},$$

где $A = \sum X_i^2$, $B = \sum X_i Y_i$, $C = \sum Y_i^2$. Путем сопоставления показано, что $K_1 \leqslant K_3 \leqslant K_2$, т. е. что третье решение является промежуточным между первыми двумя, что косвенно подтверждает его большую надежность. И. Ф. Шелихова

11 В265. Исследование методов численного решения алгебраических уравнений. Rodeja E. G. Study of a group of numerical solution of algebraic equations. «Mem. Mat. Inst. «Jorge Juan», 1956, № 17, i, 144 pp. (исп.)

11 В266. К вопросу о методе Н. И. Лобачевского решения алгебраических уравнений. Зимба В. В. «Тр. Харьковск. политехн. ин-та», 1959, 25, 225—233

Пусть задан многочлен $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ с комплексными коэффициентами и ξ — произвольное число. Тогда среди корней $x_1, \ldots, x_n$ многочлена $f(x)$ найдется хотя бы один корень x_j такой, что $|\xi - x_j| \leqslant n\left|\frac{f(\xi)}{f'(\xi)}\right|$. Этот результат применяется для вывода следующих оценок. Введем обозначения $\varepsilon_i = \frac{a_{i+1}a_{i-1}}{a_i^2}$ $(i = 1, \ldots, n-1)$, $\xi_j = a_j/a_{j-1}$ $(j = 1, \ldots, n)$. Тогда если $|\varepsilon_i| < \frac{1}{6}$ $(i = 1, \ldots, n-1)$, то все корни многочлена $f(x)$ имеют различные модули. Для многочленов с действительными коэффициентами это же утверждение справедливо при выполнении условия $0 < \varepsilon_i < \frac{1}{4}$ $(i = 1, \ldots, n-1)$. Полученные оценки предлагается использовать при вычислениях по методу Лобачевского. Доказано, что если на некотором этапе преобразований выполняется одна из указанных оценок, то величины ε_i при последующих преобразованиях будут монотонно убывать. Если добиться при этом, чтобы $|\varepsilon_i| < \frac{1}{5n}$, то корни очередного многочлена можно определить по формулам $x_j = -\xi_j$ $(j = 1, \ldots, n)$ с погрешностью, не превосходящей $\frac{2}{3}|\xi_j|$. Отмечается без доказательства, что в случае многочлена с действительными коэффициентами формулами $x_j = -\xi_j$ практически можно пользоваться, начиная с $|\varepsilon_i| < \frac{1}{2n}$. В. Л. Загускин

11 В267. Новый метод вычисления корней алгебраических уравнений. Smith G. S. A new method of calculating roots of algebraic equations. «Math. Gaz.», 1960, 44, № 350, 241—245 (англ.)

Предлагается метод, позволяющий находить последовательные десятичные знаки корня x многочлена $f(x)$ с целыми коэффициентами. Пусть найдена целая часть a корня x. Рассмотрим случай $0 \leqslant a \leqslant x$, $f(a) < 0$. Произведем замену $x = a - yf(a)$. В результате получим уравнение для определения y: $1 = yF(y)$, где $F(y)$ — многочлен с целыми коэффициентами. Для нахождения первого десятичного знака корня составим дробь $-\frac{10f(a)}{F(y)}$. Эту дробь преобразуем нужное число раз, заменяя свободные члены в числителе и знаменателе с помощью соотношения $1 = yF(y)$ и сокращая каждый раз числитель и знаменатель на y. Преобразование будем продолжать до тех пор, пока не удастся разложить дробь на сумму целого числа a_1 и дроби $g_1(y)$, у которой числитель меньше знаменателя при всех значениях y. Отмечается, что существование такой дроби можно доказать. Тогда первый десятичный знак корня x равен полученному целому числу a_1. Для нахождения второго десятичного знака дробь $g_1(y)$ умножается на 10 и преобразуется подобным же образом. Аналогично определяются и следующие знаки. Рассмотрим другие возможные случаи (например, $x < 0$). Если после выделения очередной значащей цифры полученную дробь умножить не на 10, а на целое число r, то получим представление искомого корня в системе счисления с основанием r. Все выкладки при этом производятся по правилам десятичной арифметики. Так же легко получить представление искомого корня в виде непрерывной дроби. Имеются числовые примеры.

В. Л. Загускин

11 В268. Применение результанта и механизация процесса Греффе. Bareiss Erwin H. Resultant procedure and the mechanization of the Graeffe process. «J. Assoc. Comput. Machinery», 1960, 7, № 4, 346—386 (англ.)

Рассматривается метод для вычисления всех корней многочлена степени n с действительными коэффициентами. Модули корней вычисляются по методу Греффе. Для этого вводится «коэффициент разделения» η, смысл которого заключается в том, чтобы модули корней ρ_i и ρ_j, удовлетворяющие условию $1 - \eta < \rho_i/\rho_j < 1/(1-\eta)$, считаются равными. Исходя из некоторого значения коэффициента разделения, следует определить количество этапов квадрирования по методу Греффе: $M \geqslant 3 - 3{,}3 \lg \eta + 0{,}1 \cdot n$. Коэффициент a_k^M полученного многочлена называется опорным, если

$$\left|\frac{(a_k^{M-1})^2}{a_k^M} - 1\right| < \delta, \qquad (1)$$

причем для δ даются формулы (выражающие δ через η, M и n) и таблица. Опорный коэффициент называется

«регулярным», если выполнение неравенства (1) следует из факта разделения модулей корней, и «нерегулярным» — в противном случае. Если все опорные коэффициенты являются регулярными, то их отношения определяют известным образом модули всех корней многочлена $P(x)$. Однако, как показывает автор, возможен также и случай, когда многочлен имеет нерегулярный опорный коэффициент. В связи с этим указываются достаточные условия того, чтобы опорный элемент был регулярным. Однако приведенный критерий, по словам автора, удобен лишь при ручных вычислениях. При использовании быстродействующих машин все найденные корни следует подвергать проверке, что позволит выявить нерегулярные случаи и применить к ним индивидуальный подход. Автор отмечает, что нерегулярные коэффициенты редко встречаются в многочленах, возникающих в инженерной практике. После того, как найдены модули корней, вещественные корни определяются с помощью проверки. Для нахождения комплексных корней предлагается метод, использующий понятие результата двух многочленов (см., например, А. Г. Курош (РЖМат, 1961, 8А142К). По заданному многочлену $P(x)$ и квадратичному трехчлену $x^2+px+\rho^2$ (где ρ — известный модуль искомой пары комплексных корней, p — неизвестное) составляется результант $R(p)$, представляющий собой многочлен степени n относительно p. Тем самым задача сводится к нахождению вещественного корня $p\,(|\,p\,|<2\rho)$ многочлена $R\,(p)$. Для этой цели снова применяется метод Греффе. Пригодится логическая схема программы для машины ИБМ-704 и комментированные примеры, решенные на этой машине. Приводится также сама программа на языке АЛГОЛ. Имеется исторический обзор. Список литературы — 50 назв. В. Л. Загускин

11 В269. Замечание о численном интегрировании. Stiefel Edouard, Rutishauser Heinz. Remarques concernant l'intégration numérique. «C. r. Acad. sci.», 1961, 252, № 13, 1899—1900 (франц.)

Пусть $T_{0,k}$ — квадратурная сумма формулы трапеции для интеграла $I=\int\limits_a^b f(x)\,dx$, когда отрезок (a, b) разделен на 2^k равных частей. Составлено выражение

$$T_{m,k}=\frac{4^m T_{m-1,k+1}-T_{m-1,k}}{4^m-1},$$

которое представляет собой линейную комбинацию значений функций f с положительными коэффициентами. Относительно $T_{m,0}$ утверждается, что последовательность $T_{m,0}\,(m=0, 1, \ldots)$ сходится к интегралу от функции, интегрируемой по Риману. Дается представление остатка $I-T_{m,0}$ и оценка его для функций аналитических на $[a, b]$. Указывается, что в основу доказательств положено преобразование Пуассона.

Л. А. Янович

11 В270. Обобщение квадратурных формул Гаусса — Кристоффеля. Stancu D. D. Generalizarea formulei de cuadratură a lui Gauss — christoffel. «Studii şi cercetări ştiinţ. Acad. RPR Fil. Iaşi. Mat.», 1957, 8, № 1, 1—18 (рум.; рез. русск., франц.)

Исходя из интерполяционной формулы Лагранжа—Эрмита, автор строит квадратурную формулу типа

$$\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,dx=\sum_{\nu=1}^{n} A_\nu f(x_\nu)+\sum_{\mu=1}^{k} B_\mu f(\gamma_\mu)+$$
$$+\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=0}^{r_i-1} c_{i,j} f^{(j)}(a_i)+\rho\,[f]. \qquad (1)$$

Выводится необходимое и достаточное условие того, чтобы в формуле (1), где $k=n$, были все $B_i=0$. При этом получается квадратурная формула, имеющая степень точности $2n+p-1$, где $p=r_1+r_2+\ldots+r_s$ и r_i — кратность узла a_i (при $r_i=\ldots=r_s=1$ эта формула совпадает с формулой Кристоффеля, а при $p=0$ с формулой Гаусса). Подробно исследуются различные другие частные случаи формулы (1). При этом во всех случаях приводится точное выражение остаточного члена.

11 В271. О кубатурной формуле Симпсона. Saxena R. B. On Simpson's formula of cubature. «Ann. polon. math.», 1959, 6, № 3, 289—293 (англ.)

Разыскивается кубатурная формула вида

$$\int\limits_0^h\int\limits_0^k f(x, y)\,dxdy=hk\Big[\lambda_0 f\Big(\frac{1}{2}h, \frac{1}{2}k\Big)+\lambda_1\Big\{f\Big(\frac{1}{2}h, 0\Big)+$$
$$+f\Big(h, \frac{1}{2}k\Big)+f\Big(\frac{1}{2}h, k\Big)+f\Big(0, \frac{1}{k}\Big)\Big\}+$$
$$+\lambda_2\{f(0, 0)+f(h, 0)+f(h, k)+f(0, k)\}\Big]+R(h, k)$$

такая, что остаточный член $R(h, k)$ имеет наименьший порядок в классе функций

$$f(x, y)=\sum_{\nu,\mu=p,q,r,s,\ldots}^{\infty} a_{\nu\mu}x^\nu y^\mu,$$

где $0<p<q<r<s<\ldots$ Доказано, что в этом случае

$$\lambda_0=\frac{\Big(\frac{1}{p+1}-\frac{1}{q+1}\Big)^2}{\Big(\frac{1}{2^p}-\frac{1}{2^q}\Big)^2},$$

$$\lambda_1=\frac{\Big(\frac{1}{p+1}-\frac{1}{q+1}\Big)\Big(\frac{1}{q+1}\frac{1}{2^p}-\frac{1}{p+1}\frac{1}{2^q}\Big)}{\Big(\frac{1}{2^p}-\frac{1}{2^q}\Big)^2},$$

$$\lambda_2=\frac{1}{(p+1)^2}-\frac{1}{2^{2p}}\lambda_0-\frac{2}{2^p}\lambda_1.$$

Если $R(h, k)=O(h^{s+1}, k^{s+1})$, то $p=1$, $q=2$, $r=3$

Н. П. Жидков

11 В272. Об одной формуле приближенного интегрирования. Севастьянов Н. Б. «Тр. Калининигр. техн. ин-та рыбн. пром-сти и х-ва», 1960, вып. 11, 97—102

Взяв в качестве приближенного значения интеграла $\int\limits_0^l f(x)\,dx\approx\frac{l}{c}\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i)$, где $c=\text{const}$, и приближенно заменяя подынтегральную функцию $f(x)$ тригонометрическим многочленом $f(x)\approx a_0+\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\cos\frac{k\pi x}{l}$, автор получает другим путем известную «формулу касательных» (Смирнов В. И., Курс высшей математики, 1953, § 109).

$$\int\limits_0^l f(x)\,dx\approx h\Big(y_{\frac{1}{2}}+y_{\frac{3}{2}}+\ldots+y_{n-\frac{1}{2}}\Big),$$

где $h=\frac{l}{n}$, $y_{n-\frac{1}{2}}=f\Big[\Big(n-\frac{1}{2}\Big)h\Big]$. Д. Б. Тополянский

11 В273. Об одном методе построения квадратурных формул с высшей степенью точности. Stancu D. D. O metodă pentru construirea de formule de cuadratură de grad înal de exactitate. «Comun. Acad. RPR», 1958, 8, № 4, 349—358 (рум.; рез. русск., франц.)

Воспользовавшись интерполяционной формулой Лагранжа—Эрмита, автор выводит квадратурную формулу

$$\int_a^b p(x) f(x)\,dx = \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu f(x_\nu) + \sum_{\mu=1}^{k} B_\mu f(\gamma_\mu) + \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=0}^{r_i-1} c_{i,j} f^{(j)}(a_i) + \rho[f]. \quad (1)$$

В предположении, что числа a_i и соответствующие им порядки кратности r_i выбраны так, что функция $\omega(x)$ неотрицательна в конечном или бесконечном интервале (a, b), а функция $p(x)$ такова, что существует последовательность ортогональных многочленов $\{\Phi_n(x)\}$, присоединенных к ней и к интервалу (a, b), доказывается, что если $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — корни многочлена Кристоффеля—Бернштейна, тогда, каковы бы ни были параметры $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$, в формуле (1) $B_1 = \ldots = B_k = 0$ $(k \leqslant n)$.

Рассматриваются различные частные случаи.

Из резюме автора

11 В274. Приближенное вычисление интеграла $\int_0^\infty e^{-x} \times J_0\left(\frac{\eta x}{\xi}\right) J_1\left(\frac{x}{\xi}\right) x^{-n}\,dx$. Weeg Gerard P. Numerical Integration of $\int_0^\infty e^{-x} J_0\left(\frac{\eta x}{\xi}\right) J_1\left(\frac{x}{\xi}\right) x^{-1}\,dx$ «Math. Tables and Other Aids Comput.», 1959, 13, № 68, 312—313 (англ.)

Интегралы, приведенные в заголовке, встречаются в теории упругости. В статье предлагается метод вычисления интеграла

$$I(\eta, \xi, n) = \int_0^\infty e^{-x} J_0\left(\frac{\eta x}{\xi}\right) J_1\left(\frac{x}{\xi}\right) x^{-n}\,dx, \quad (1)$$

где η и ξ принимают целые значения, а $n = 0$ или 1. Для вычисления интеграла (1) применяется формула Симпсона с пределами интегрирования 0 и 12, причем интервал интегрирования делится на 400 частей. Указывается, что значения интеграла были вычислены с четырьмя десятичными знаками при семи различных комбинациях η и ξ. Приводится таблица для $I(\eta, \xi, 0)$ и $I(\eta, \xi, 1)$ с пятью десятичными знаками при $(\xi, \eta) = (1,1)$; (1; 3); (1; 6); (3; 1); (3; 3); (6; 1); (6; 6). Табличные значения точны до одной единицы последнего знака. Для сравнения значения интеграла (1) вычисляются также по квадратурной формуле Гаусса—Лагерра. М. К. Керимов

11 В275. О вычислении некоторых сингулярных интегралов с ядром типа Коши. Пыхтеев Г. Н. «Прикл. матем. и механ.», 1959, 23, № 6, 1074—1082

Многие задачи гидроаэродинамики, теории упругости и теории фильтрации сводятся к вычислению интегралов вида

$$J(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{f(t)}{t-x}\,dt, \quad -1 < x < 1,$$

$$I(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{f(t)}{t-x}\,\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad -1 < x < 1.$$

Основное содержание работы сводится к выводу следующих приближенных формул для вычисления $J(x)$ и $I(x)$:

$$J(x) \approx J_n^{(k)}(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{s=1}^{k} (-1)^s \left[\gamma_1^{2(s-1)} p_1^{(2s-1)}(x) + (\operatorname{sign} x)\,\gamma^{(2s-1)} q_1^{(2s)}(x^*) + \gamma_2^{2(s-1)} p_2^{(2s-1)}(x) - \gamma^{2(s-1)} p_2^{(2s-1)}(x^*)\right] - \sum_{m=1}^{n} b_m^* T_m(x),$$

$$I(x) \approx I_n^{(k)}(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{s=1}^{k} (-1)^s \left[-\gamma^{2(s-1)} p_1^{(2s-1)}(x^*) + \gamma_1^{(2s-1)} q_1^{(2s)}(x) + \gamma_2^{(2s-1)} q_2^{(2s)}(x) + (\operatorname{sign} x)\,\gamma^{(2s-1)} q_2^{(2s)}(x^*)\right] + \sum_{m=1}^{n} a_m^* U_m(x).$$

Приведены таблицы (с четырьмя десятичными знаками) функций $p_1^{(1)}(x)$, $p_1^{(2)}(x)$, $p_2^{(1)}(x)$, $p_2^{(3)}(x)$, $q_1^{(2)}(x)$, $q_1^{(4)}(x)$, $q_2^{(2)}(x)$, $q_2^{(4)}(x)$ при $x = 0, 0(0,1)1,0$.

11 В276. Приближение интерполяционными полиномами графических изображений стволов. Wutt Hermann. Schaftkurven-Nährung durch Interpolations-Polynome. «Cbl. ges. Forstwes.», 1961, 78, № 1, 39—55 (нем.)

Статья содержит математическое решение вопроса о приближенном определении графоаналитическим методом диаметров стволов деревьев на различных высотах по имеющимся обмерам диаметров в опорных точках. Радиусы ствола $y = \frac{d}{2}$ рассматриваются как функции их удаленности от вершины или от земли в зависимости от строения и поражения пороками древесины. При произвольно измеренных радиусах $y_0, y_1, \ldots, y_n$ соответственно в удалении от вершины $x_0, x_1, \ldots, x_n$ для определения диаметра $d = 2y$, соответствующего точке x из интервала $[x_0, x_n]$, пользуются интерполяционными формулами Лагранжа или Ньютона; при равноудаленных опорных точках рекомендуется применение формулы Эрретта—Лапласа. С целью получения большой точности графическое изображение ствола разбивается на несколько отдельных секций, для которых строятся интерполяционные полиномы. Исследовано влияние числа опорных точек на степень полинома и накопление погрешности результата. Указывается, что достаточно трех-четырех измеренных диаметров для получения необходимой для практики точности интерполяции. Отмечается, что метод особенно удобен при проведении численных расчетов на электронных вычислительных машинах со средней емкостью устройств ввода и вывода информации. И. Ф. Шелихова

11 В277. Численное интегрирование по сферической оболочке. Peirce William H. Numerical integration over the spherical shell. «Math. Tables and Other Aids Comput.», 1957, 11, № 60, 244—249 (англ.)

Исследуются кубатурные формулы вида

$$\iiint f(x, y, z)\,dxdydz \approx \sum_{i=1}^{n} a_i f(x_i, y_i, z_i),$$

точные для полиномов произвольно высокого порядка.

11 В278. К численной оценке многомерных интегралов. Albrecht J., Collatz L. Zur numerischen Auswertung mehrdimensionaler Integrale. «Z. angew. Math. und Mech.», 1958, 38, № 1-2, 1—15 (нем.; рез. англ., франц., русск.)

Для интегралов вида

$$\int_{B_r} u(x_\rho)\,dv, \quad dv = dx_1 dx_2 \ldots dx_r,$$

где B_r — замкнутая измеримая область r-мерного пространства, $u(x_\rho)$ — $N+1$ раз непрерывно дифференцируемая в B_r функция, выводятся формулы численного интегрирования посредством сравнения соответствующих членов в тейлоровских разложениях подынтегральной функции и некоторого приближенного выражения. Подынтегральная функция $u(x_\rho)$ разлагается в ряд в окрест-

ости центра тяжести области интегрирования. Приженное выражение представляет собой сумму значений дынтегральной функции в некоторых точках области нтегрирования, выбираемых из соображений симметрии, содержит некоторый параметр. Численное значение оследнего параметра определяется путем сравнения боих тейлоровских разложений. Для представления ходящих в ряды Тейлора частных производных функции (x_ρ) в более кратком и ясном виде авторы вводят рассмотрение некоторые частные дифференциальные ераторы Δ_{2k}^{n-k} и Δ_{2k+1}^{n-k}. Указанным образом авторы выводят известные ранее и ряд новых формул для численного интегрирования как двумерных интегралов с областями интегрирования в виде круга, квадрата, правильных треугольника и шестиугольника, так и трехмерных интегралов с областью интегрирования в виде сферы, куба и тетраэдра. В заключение дается общий метод определения верхней границы погрешности, совершаемой при численном интегрировании по r-мерному кубу ($r \geqslant 2$), при этом оценивается разность между приближенным выражением и интегралом через производные подынтегральной функции высшего порядка. Указываются формулы с оптимальной оценкой погрешности. Метод оценки погрешности подробно иллюстрируется на примере квадрата и куба. Н. Я. Лященко

11 В279. Численное преобразование Лапласа. Айзенштат В. С., Метельский А. С. «Инж.-физ. ж.», 1961, 4, № 2, 82—91 (рез. англ.)

Рассматривается проблема численного выполнения преобразования Лапласа. Интеграл

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-px} f(x)\, dx$$

простыми преобразованиями сводится к интегралу

$$\int_0^\infty t^s e^{-t} \psi(t)\, dt \quad (s > -1),$$

который приближенно вычисляется с помощью квадратурной формулы

$$\int_0^\infty t^s e^{-t} \psi(t)\, dt \cong \sum_{k=1}^n A_k \psi(t_k).$$

Узлы t_k являются корнями обобщенного многочлена Лагерра n-й степени $L_n^{(s)}(t)$, а коэффициенты A_k даются соотношениями

$$A_k = n!\, \Gamma(n+s+1)/t_k [L_n^{(s)\prime}(t_k)]^2,\ k = 1, 2, \ldots, n.$$

Приводятся таблицы значений величин A_k, t_k для

$$s = -\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$$

и $n = 4\,(1)\,10$. Таблицы даны с 5 значащими цифрами и десятичным порядком. Библ. 5 назв.

Ю. М. Барабошкин

11 В280. Возможность квадратурной формулы Чебышева на бесконечном интервале. Wilf Herbert S. The possibility of Tschebycheff quadrature on infinite intervals. «Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.», 1961, 47, № 2, 209—213 (англ.)

Пусть (a, b) — произвольный отрезок оси x и $\psi(x)$ есть функция распределения единичной массы на (a, b). Говорят, что для $\psi(x)$ возможна формула Чебышева с N членами, если существуют точки $x_k \in (a, b)$ $(k = 1, \ldots, N)$, для которых равенство

$$\int_a^b f(x)\, d\psi(x) = N^{-1} \sum f(x_k) \qquad (1)$$

выполняется точно всякий раз, когда $f(x)$ есть алгебраический многочлен степени $\leqslant N$. Конечная или бесконечная совокупность $\{n_j\}$ значений N, для которых формула Чебышева возможна, называется T-последовательностью для $\psi(x)$. Функцию $\psi(x)$ называют обладающей T-свойством, если формула Чебышева возможна для бесконечного множества $\{n_j\}_1^\infty$ значений N. Применение известной теоремы Иенсена о неравенствах к уравнениям, служащим для определения абсцисс x_k

$$\left(\mu_r = \int_a^b x^r d\psi(x) = N^{-1} \sum x_k^r \ (r = 1, \ldots, N) \right),$$

позволяет высказать теорему:

1. Пусть $\{n_j\}^\infty$ есть T-последовательность. Тогда для каждого фиксированного j ($j = 1, 2, \ldots$) последовательность чисел $\tau_r = (n_j \mu_{2r})^{1/r}$ $(r = 1, \ldots, [n_j/2])$ будет убывающей. Если $a \geqslant 0$, то будет убывающей последовательность $\sigma_r = (n_j \mu_r)^{1/r}$ $(r = 1, 2, \ldots, n_j)$. При помощи нее легко получаются два следующие результата.

2. Весовая функция Лягерра $d\psi(x) = x^\alpha e^{-x} dx$ не обладает T-свойством. Формула Чебышева не может быть построена ни при каком N, для которого выполняется неравенство $\Gamma(\alpha)/N > \Gamma(\alpha + N - 1)/(\alpha + N - 1)^{N-1} \sim AN^\alpha e^{-N}$ $(N \to \infty)$. При $\alpha = 1$ T-последовательность веса Лягерра состоит из двух чисел {1, 2}.

3. Весовая функция Эрмита $d\psi(x) = \exp(-x^2/2)\, dx$ $(-\infty < x < \infty)$ не обладает T-свойством. T-последовательность ее состоит из трех чисел {1, 2, 3}.

Формулируемая ниже теорема доказана с целью выяснить насколько далекими друг от друга будут числа n_j в T-последовательности.

4. Пусть $\{2p_j\}_1^\infty$ и $\{2q_j + 1\}_1^\infty$ суть четная и нечетная подпоследовательности T-последовательности весовой функции $\psi(x)$, для которой масса, лежащая вне любого конечного интервала, будет положительной. Тогда ни для какого целого положительного m не могут выполняться последовательности неравенств

$$p_j \leqslant p_{j-1}^m \quad \text{и} \quad q_j \leqslant q_{j-1}^m \quad (j = 2, 3, \ldots).$$

Если же $a \geqslant 0$, то ни при каком m не может выполняться последовательность неравенств $n_j \leqslant n_{j-1}^m$ $(j = 2, 3, \ldots)$.

Автор высказывает предположение, что $\psi(x)$ может обладать T-свойством только в том случае, когда соответствующая $\psi(x)$ единичная масса будет распределена на конечном отрезке. В. И. Крылов

11 В281. Метод вычисления некоторых бесконечных интегралов. Boley Bruno A. A method for the numerical evaluation of certain infinite integrals. «Math. Tables and Other Aids Comput.», 1957, 11, № 60, 261—264 (англ.)

Описан метод вычисления интегралов вида $\int_a^\infty f(x) \sin x\, dx$, основанный на их представлении в виде сходящихся рядов, которые получаются из соответствующих асимптотических разложений. Автор отмечает, что этот метод может быть применен и к другим бесконечным интегралам, для которых известны асимптотические представления.

11 В282. Итерационные формулы для решения уравнений и их использование для аппроксимации функций (Аннотация статьи, принятой к печати). Белостоцкий А. Я. «Изв. высш. учебн. заведений. Математика», 1961, № 3, 65

11 В283. Рациональная аппроксимация функций, формально определенных своим разложением в степенной ряд. Wynn P. The rational approximation of functions

which are formally defined by a power series expansion. «Math. Comput.», 1960, **14**, № 70, 147—186 (англ.)

Рациональную функцию

$$\frac{U(x)}{V(x)} = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_\nu x^\nu}{\beta_0 + \beta_1 x + \ldots + \beta_\mu x^\mu}, \qquad (1)$$

аппроксимирующую функцию $\beta(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 +$, Паде предложил (Padé H., Ann. École norm. supér., 1892, 3, 9) определять из условия, что ряд $\beta(x) V(x) - U(x)$ начинается с члена, содержащего $x^{\mu+\nu+1}$. Автор приводит различные методы вычисления значений и коэффициентов функции (1) (связанные с непрерывными дробями, ортогональными многочленами и алгоритмом частных и разностей) и сравнивает их с точки зрения объема вычислительной работы. S. Paszkowski

11 В284. Об одном интерполяционном алгоритме и некоторых других формулах теории интерполяции рациональными функциями. Wynn Peter. Über einen Interpolations — Algorithmus und gewisse andere Formeln, die in der Theorie der Interpolation durch rationale Funktionen bestehen. «Numer. Math.», 1960, **2**, № 3, 151—182 (нем.)

Подробное описание алгоритма, по которому вычисляется значение рациональной функции вида

$$\frac{\sum_{p=0}^{n} a_p x^p}{\sum_{p=0}^{n} b_p x^p} \left(\text{соответственно,} \frac{\sum_{p=0}^{n+1} a_p x^p}{\sum_{p=0}^{n} b_p x^p} \right),$$

если известны ее значения в $2n+1$ (соответственно, $2n+2$) точках. Алгоритм (вместе с проверкой промежуточных результатов) требует выполнения $\frac{1}{2}(5h^2 - 3h)$ вычитаний, $\frac{7}{2}(h^2 - h)$ умножений и $h^2 + 2h - 3$ делений, где $h = 2n+1$ (соответственно, $h = 2n+2$). Приведена схема алгоритма в языке АЛГОЛ, рассмотрены методы контроля, особые случаи, скорость распространения ошибок и другие вопросы.

Примечание референта. В работе много опечаток, в частности в формулах (4. 0. 23), (4. 1. 4), (4. 1. 8), (4, 2. 4). В схеме алгоритма (стр. 160) должно быть

$$\text{kappa}_{s,r} := \text{sigma}_{s,r} \times e/\text{pi}_{s,r};$$

$$c_{s,r} := -\text{alphaomega}_{s,r-1} \times \ldots$$

S. Paszkowski

11 В285. Гладкое интерполирование. Rivlin T. J., Smooth interpolation. SIAM Rev., 1961, **1**, № 1, 60—63 (англ.)

При использовании интерполяционного многочлена Лагранжа часто получают следствие осцилляции недостаточно хорошие результаты. Автор предлагает вместо интерполяционного многочлена Лагранжа использовать многочлен

$$P(x) = L(x) + \alpha\pi(x),$$

где $L(x)$ — интерполяционный многочлен Лагранжа степени $n-1$, построенный по узлам $x_1, x_2, \ldots, x_n$,

$$\pi(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$$

и постоянная α подбирается из условия, что $P(x)$ имеет минимальную длину дуги на отрезке интерполяции. Показывается, что α определяется однозначно поставленным условием. Для определения α требуется решить сложное нелинейное уравнение и обычно оно решается приближенно. Приводятся примеры, показывающие, что результаты численного дифференцирования с помощью $P(x)$ значительно лучше, чем с помощью $L(x)$.

Н. П. Жидков

11 В286. Чебышевские полиномиальные аппроксимации вещественных функций. Campbell Lloyd. Tchebyshev polynomial approximation of real functions. «Ordnance Comput. Res. Rept», 1958, **5**, № 2, 14—18 (англ.)

11 В287. О методе аппроксимаций Ньютона. Shama A. On Newton's method of approximation. «Ann. polon. math.», 1959, **6**, № 3, 295—300 (англ.)

Доказаны теоремы: 1) Если x_n есть $(p-1)$-я подходящая дробь для α, где α — непрерывная периодическая дробь $a(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ (p — число членов в периоде, a_p обязательно простое), то число

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 - B}{2x_n + A}$$

равно $(2p-1)$-й подходящей дроби α, если α — корень уравнения $x^2 + Ax + B = 0$. 2) Если α — непрерывная дробь с периодом $2l$ вида $\alpha = a(a_1, a_2, \ldots, a_{l-1}, b, a_{l-1}, \ldots, a_1, d)$ такая, что период симметричен, за исключением последнего члена, то все итерации по формуле Ньютона, исходящие из $x_n = (i-1)$-й подходящей дроби для α, также являются подходящими дробями для α. Н. П. Жидков

11 В288. Нахождение численного значения второй производной для данного значения переменной от функции, заданной в неравноотстоящих точках. Ziller A. Calcul de la valeur numérique de la dérivée seconde, pour une valeur de la variable, d'une fonction dennée par des valeurs non équidistantes. «Publs scient. et techn. Ministère air», 1958, N. N. T. 77, 61—85 (франц.)

Для вычисления второй производной в точке X функции $y = f(x)$, заданной таблицей своих значений $f_0, f_1, \ldots, f_n$, предлагается формула вида

$$y'' = \frac{2a_2}{u^2}, \qquad (1$$

где $a_2 = \sum_{p=2}^{p=n} \alpha_p Q_p$, u — масштаб по оси x; Q — частное от деления разности значений функции f на разность значений переменной x. Указывается, что, несмотря на медленную сходимость ряда (1) для некоторых значений x, заключенных между x_0 и x_n, можно получить значение a_2, близкое к истинному. Подробно описывается схема вычислений для случая, когда функция задана пятью значениями, соответствующими пяти неравноотстоящим значениям аргумента x ($n = 4$). Для определения соответствующих значений x получены кубические уравнения, которые решены с помощью номограммы из выравненных точек. Отмечается, что предложенный способ обеспечивает достаточную для практических расчетов точность. Изложенное проиллюстрировано числовыми примерами. И. Ф. Шелихова

11 В289. Приспособление для расчета переходных характеристик. Braun Jaromír. Pomůcka pro výpočet přechodných odezev. «Slaboproudý obzor», 1961, 22, № 4, 209—212 (чешск.; рез. русск., нем., англ., франц.)

Описано простое графическое приспособление, позволяющее упростить численный расчет переходных характеристик, представленных в виде суммы затухающих синусоидальных функций. На примере приведен способ расчета при помощи этого приспособления. Резюме автора

11 В290. Применение метода разбиения матриц к решению задач установившихся колебаний. Duddles James. Applying a matrix partitioning technique to solving steady state vibration problems. «Industr. Math.», 1959—1960, **10**, № 2, 61—69 (англ.)

Линейную систему уравнений с матрицей A, имеющей достаточно много нулевых элементов, предлагается решать путем разбиения A, матриц неизвестных и правых частей на подматрицы таким образом, что после пере

множения их исходная система записывается в виде системы матричных уравнений, которая решается методом исключения. При этом считается, что несколько подматриц в этом разбиении должны быть нулевыми. Рассматриваются некоторые колебательные системы материальных точек, описание которых сводится к решению такого вида систем. Обсуждается вопрос экономичного использования счетных машин при решении этих систем. Изложение проводится для конкретного примера.

Л. А. Янович

11 В291. Пример расчета электромагнитного поля в трехфазной системе токопроводов прямоугольного сечения. Алехин В. М. «Изв. высш. учебн. заведений. Электромеханика», 1961, № 4, 3—32

Приводится пример расчета электромагнитного поля в системе трех медных токопроводов прямоугольного сечения методом бесконечных систем уравнений, решаемых приближенно посредством замены их конечными системами.

Из введения статьи

11 В292. Гидродинамический расчет дренированных флютбетов. 2. Применение метода последовательных конформных отображений. Фильчаков П. Ф. «Укр. матем. ж.», 1960, **12**, № 4, 439—462 (рез. англ.)

Часть 1 см. РЖМат, 1961, 4Б144. Приводится приближенное решение для плоского дренированного флютбета произвольного профиля с n дренажными отверстиями при $T \leqslant \infty$, полученное методом последовательных конформных отображений, описанным автором ранее. (РЖМат, 1956, 6531; 1957, 350, 7821).

11 В293. Применение алгебраических дробей к логарифмическим функциям. Anderson Douglas G. Algebraic fractions applied to lagarithmic functions. «Industr. Math.», 1959—1960, **10**, № 2, 1—21 (англ.)

Применяется интерполяционный метод для сведения шестизначных таблиц к четырехзначным без потери точности. Выведена формула, удобная для вычисления натуральных логарифмов на вычислительной машине, работающей в двоичной системе счисления.

11 В294. Численные расчеты четырехзвенников. Walther A., Schappert H. Numerische Behandlung des Gelenkvierecks. «Numer. Math.», 1959, **1**, № 2, 110—120 (нем.)

Рассматривается плоский четырехугольник с заданными сторонами, связанными шарнирно друг с другом. Одна из сторон закреплена. Изучается движение точки, твердо скрепленной со стороной, противоположной закрепленной. Ее траектория — кривая шестого порядка. Выведено параметрическое уравнение этой кривой. Указан план вычисления координат кривой на электронной машине. Приведена программа вычислений для машин ИБМ-650. Даны конкретные примеры. Указан способ вычислений скоростей и ускорений. Н. П. Жидков

11 В295. Программа «вычерчивания кривой» для обратного преобразования Лапласа рациональной функции. Bashkow T. R. A «curve plotting» routine for the inverse Laplace transform of rational functions. «J. Assoc. Comput, Machinery», 1958, **5**, № 1, 52—56 (англ.)

Описана программа табулирования функции, полученной по способу Тайтуса (РЖМат, 1958, 8316).

И. П. Жидков

11 В296. Расчет осесимметричного вихревого потока невязкой сжимаемой жидкости в осевых турбомашинах. Сироткин Я. А. «Изв. АН СССР. Отд. техн. н. Механ. и машиностр.», 1961, № 2, 78—88

Решается осесимметричная прямая задача для венцов статора и ротора конечной ширины B в осевом направлении и учитывается радиальная проекция массовой силы F_r (связанной с воздействием лопаток на поток). Предлагаемый метод решения отличается от известных методов тем, что вместо двух нелинейных интегральных уравнений для осевой скорости c_z и давления p можно пользоваться лишь одним уравнением для c_z, что значительно сокращает вычисления. Обосновывается замена уравнений в частных производных системой обыкновенных дифференциальных уравнений по методу прямых. Рекомендуется полученное из опыта эмпирическое условие для выбора сетки, обеспечивающее сходимость процесса последовательных приближений. Применяемый метод последовательных приближений имеет то преимущество перед обычными, что вместо совместного решения системы из $(n-1)$ $(j-1)$ уравнений решается система из двух уравнений в каждом сечении изолированно от других, что существенно сокращает вычислительную работу и позволяет получить решение даже путем ручного счета для сложной нелинейной задачи. Погрешность составляет одновременно по осевым скоростям 1,0—1,5% и по смещениям линий тока 0,5—1,0%. В качестве примера дается расчет потока в ступени осевой газовой турбины, работающей на сжатом воздухе ($\kappa = 1.4$), причем показано влияние конечной толщины лопаток. И. Ф. Шелихова

11 В297. Задачи вычислительной техники. Дородницын А. А. «Тр. Всес. совещания по вычисл. матем. и применению средств вычисл. техн.». Баку, АН АзербССР, 1961, 9—13

11 В298. Механическое приспособление для нахождения действительных корней кубических уравнений. Hellman Morton J. A mechanical device for finding the real roots of the cubic. «Amer. Math. Monthly», 1961, **68**, № 3, 278—279 (англ.)

Описано простое приспособление для механизации хорошо известного графического приема нахождения действительных корней уравнения $x^3+ax+b=0$ пересечением кубической параболы $y=x^3$ с прямой $y=-ax-b$. На прозрачной пластинке нанесены окружность и прямолинейная риска, проходящая через ее центр. На окружности имеется шкала тангенсов углов, отсчитываемых от риски. Пластинка накладывается на заранее заготовленный график кривой $y=x^3$. Центр окружности должен оказаться на оси x, а риска должна составить с ней угол, тангенс которого равен $-a$. Затем пластинка перемещается параллельно самой себе до пересечения риски с осью y на расстоянии $-b$ от начала. Абсциссы точек пересечения риски с параболой, как и при обычном графическом решении, представляют искомые корни.

А. Б. Штыкан

11 В299. О направлении проективного преобразования номограмм. Пентковский М. В. «КазССР Ғылым Акад. хабарлары, Изв. АН КазССР. Сер. матем. и механ.», 1960(1961), вып. 9(13), 3—10 (рез. каз.)

Излагаются вопросы, связанные с конструированием номограмм из выравненных точек уравнений с тремя переменными, в которых две из трех шкал берутся одинаково растянутыми вдоль рамки чертежа. Исследуется влияние сжатия одной из шкал номограммы при сохранении размеров рамки чертежа на величину погрешности вычисления по номограмме. Рассматриваются проективные преобразования на сетках с параллельными инвариантными прямыми в случаях, когда один из двух параметров преобразования считается постоянным, и приводятся достаточные условия (в геометрической и аналитической форме), при выполнении которых номограмма должна быть построена с двумя одинаково растянутыми шкалами, так как сжатие одной из шкал ведет к увеличению погрешности вычисления по номограмме. Приведен числовой пример. И. Ф. Шелихова

11 В300. О номографируемости уравнений. Бахвалов С. В. «Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та», 1960, **96**, 231—237

Приводится новое, более простое доказательство следующей теоремы И. А. Вильнера: Необходимое и достаточное условие номографируемости уравнения

$$z = f(x, y)$$

состоит в том, что функции

$$\psi_x = X_1'(x)\,[Y_1(y) - X_2(x)] + X_2'(x)\,[X_1(x) - Y_1(y)], \quad (1)$$

$$\psi_y = Y_1'(y)\,[Y_2(y) - X_2(x)] + Y_2'(y)\,[X_1(x) - Y_1(y)]$$

удовлетворяют уравнению Гронвалла

где $$M + f_y\left(2\frac{\psi_{xy}}{\psi_y} - \frac{\psi_{xx}}{\psi_x}\right) + f_x\left(2\frac{\psi_{xy}}{\psi_x} - \frac{\psi_{yy}}{\psi_y}\right),$$

$$M = \frac{f_{xx}f_y^2 - 2f_{xy}f_xf_y + f_{yy}f_x^2}{f_xf_y}.$$

Указывается способ определения элементов определителя Массо, а также приводятся примеры определения в некоторых специальных случаях решения ψ уравнения Гронвалла, удовлетворяющего условиям (1).

И. Ф. Шелихова

11 В301. Необходимые и достаточные условия представимости уравнения $z=f(x, y)$ в виде уравнения 4-го номографического порядка типа Кларка и метод отыскания для него элементов определителя Массо. Грушкова Т. «Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та», 1960, 96, 239—258

Выводятся необходимые и достаточные условия, которым должна удовлетворять функция $f(x, y)$, чтобы уравнение $z = f(x, y)$ можно было представить в виде уравнения четвертого номографического порядка типа Кларка. Доказано, что уравнение $z = f(x, y)$ номографируется в области D плоскости xoy номограммой Кларка тогда и только тогда, когда: .) в области D имеем $\mu \neq 0$, 2) в области D тождественно выполняются равенства

$$-\left(\frac{\nu}{\mu}\right)_y = \left(\sigma + \tau\frac{\nu}{\mu}\right)_x, \quad \left(\frac{\nu}{\mu}\right)_y = 2Ce^{-\int\frac{\nu}{\mu}dx},$$

где ν, μ, τ, σ—выражения, составленные из производных функции $f(x, y)$ не выше четвертого порядка и C—любая константа. Дается метод отыскания элементов определителя Массо для заданного уравнения. Практическое применение полученных результатов поясняется конкретными примерами.

И. Ф. Шелихова

11 В302. О номографировании функций многих переменных с точностью до малых высшего порядка. Крейнес М. А., Кишкина З. М. «Успехи матем. наук», 1961, 16, № 2, 167

11 В303 К. Экспериментальные и численные аппроксимации. Lefrançois A. Approximations expérimentales et numériques. Paris, Eds Rev. optique, 1959, 128 p., ill. (франц.)

11 В304 К. Вычислительная математика (Цзисуань шусюэ). Шанхай, Шанхай кэсюэ цзишу чубаньшэ, 1960, 82 тыс. иерогл., 0.42 юаня «Цюаньго синьшуму, Quanguo xinshumu», 1960, № 22, 9 (кит.)

11 В305 К. Численные методы. Бут Э. Д. Перев. с англ. М., Физматгиз, 1959, 239 стр., илл., 7 р. 45 к.

Книга небольшого объема в ясной и сжатой форме без подробных доказательств и выводов излагает основные принципы, лежащие в основе вычислений на современных вычислительных машинах. Гл. I «Содержание и цели численного анализа» носит вводный характер и содержит краткий исторический обзор численного анализа, характеристику ручных и автоматических вычислительных средств, элементарные понятия о точности и ошибках вычислений. В гл. II «Табулирование и разности» вводится понятие о разностях и правила пользования таблицами (линейная интерполяция). В гл. III «Интерполирование» определяются понятия нисходящих, восходящих и центральных разностей, различных разностных операторов и связь между ними. Приведены интерполяционные формулы Ньютона—Грегори, Гаусса (для интерполирования вперед и назад), Стирлинга, Бесселя, Эверетта, формулы Бесселя и Эверетта через центральные разности, формула Ньютона—Грегори через разделенные разности и формула Лагранжа. В гл. IV «Численное интегрирование и дифференцирование» приведены формулы численного дифференцирования, принадлежащие Бикли, и формулы механических квадратур (трапеций, Симпсона, Уэдлля, правило «трех восьмых», Ньютона—Котеса, Эйлера — Маклорена, формулы, содержащие центральные разности, Чебышева, Гаусса, включая бесконечные пределы интегрирования). Обсуждая вопрос погрешности квадратурных формул, автор дает оценки для ошибок формул Симпсона и Ньютона—Котеса. В гл. V «Суммирование рядов» на примерах факториальных полиномов и улучшения сходимости медленно сходящихся рядов дается приложение метода конечноразностных операторов к вопросам суммирования рядов. В гл. VI «Решение обыкновенных дифференциальных уравнений» рассматриваются вопросы отыскания приближенного решения вблизи начальной точки методами Пикара, разложения в ряд Тейлора, Рунге—Кутта, Адамса, Милна, Фокса и Гудвина. Кратко обсуждается решение граничных задач и задач на собственные значения для уравнения 2-го порядка. В гл. VII «Системы линейных уравнений» после основных определений последовательно излагаются методы решения линейных систем алгебраических уравнений (правило Крамера, исключения по Гауссу, метод главных элементов, Холесского, различные итерационные методы спуска с определенным выбором меры величины погрешности приближенного решения), обращения матриц (исключение по Гауссу, метод главных элементов, Холесского, посредством использования теоремы Кели—Гамильтона, итерации и Монте-Карло), нахождения собственных значений и собственных векторов матриц (ортогонализации, «очистки» Ричардсона, эскалаторный Морриса, Неймана—Гольдстайна), вопрос меры обусловленности матриц. Гл. VIII «Уравнения в частных производных» посвящена применению метода конечных разностей к решению уравнений параболического, гиперболического и эллиптического типов с одной и двумя пространственными переменными. Указываются условия устойчивости решения и оценки погрешности между точным и приближенным решениями. Излагается релаксационный метод решения линейных систем алгебраических уравнений, получающихся при решении конечноразностным методом граничных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений эллиптического типа. Применяется метод Монте-Карло для нахождения решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа во внутренней точке двумерной области. В гл. IX «Нелинейные алгебраические уравнения» изложены методы решения уравнений вида $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$. Предварительное нахождение корней производится графически, а уточнение — итерационными методами (ложного положения, Ньютона—Рафсона, наискорейшего спуска). В гл. X «Аппроксимирование функций» рассматриваются вопросы равномерного и среднеквадратичного приближения функций на вычислительных машинах и некоторые системы ортонормальных функций (полиномы Лежандра, Лагерра, Эрмита, Чебышева). Гл. XI «Ряды Фурье» посвящена вопросу суммирования методом Биверса и Липсона трехкратных рядов Фурье, возникающих при изучении кристаллической структуры вещества, а также разложению в ряд Фурье периодической функции одной переменной. В гл. XII «Интегральные уравнения» даются методы решения уравнений Вольтерра и Фредгольма посредством сведения их к линейным системам алгебраических уравнений, а также методы решения задач на собственные значения, связанные с уравнением Фредгольма, и применение метода Монте-Карло к решению интегральных уравнений. Каждая глава снабжена библиографией. В конце книги имеется предметный и именной указатели и библиография.

Н. Я. Лященко

11 В306 К. Математический практикум вычислений. Учебник для физ.-матем. фак. ж.-д. ин-тов УССР. Фільчаков П. Ф. Математичний практикум. Посіб-

ник для фіз.-матем. фак. пед. ін-тів УРСР. Київ, «Рад. школа», 1958, 278 стор., іл., 5 р. 45 к. (укр.)

Пособие по вычислительному практикуму состоит из 9 глав. Гл. 1 «Основные сведения из теории приближенных вычислений» содержит понятия приближенного числа, абсолютной и относительной погрешностей, сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в степень и извлечение корня из приближенных чисел. Гл. 2 «Техника вычислений» посвящена принципам построения механических вычислительных машин (арифмометров и полуавтоматов), технике выполнения основных арифметических действий на арифмометре, некоторым рациональным способам вычислений, оформлению и контролю над вычислениями. В гл. 3 «Табулирование и интерполирование» рассматриваются вопросы составления таблиц с одним и двумя входами (по заданной формуле и с помощью рекуррентных соотношений), интерполирования функций и обратного интерполирования. Дается интерполяционная формула Грегори—Ньютона для интерполирования вперед и назад. В гл. 4 «Приближенное решение уравнений» изложено решение линейных систем алгебраических уравнений методом исключения и некоторые численные методы решения уравнений вида $f(x)=0$ (Ньютона, линейной интерполяции и итерации). В гл. 5 «Приближенное дифференцирование и интегрирование» дан метод численного дифференцирования, основанный на интерполяционной формуле Грегори — Ньютона, и численное интегрирование по формулам трапеций и Симпсона. Рассмотрено графическое дифференцирование и интегрирование, а также применение полярного планиметра Амслера для измерения площадей. В гл. 6 «Численное интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений» применяется численный метод Адамса к интегрированию уравнений 1-го порядка и систем уравнений В гл. 7 «Действия над степенными рядами» рассматриваются четыре арифметических действия над степенными рядами, возведение в степень и обращение их. В гл. 8 «Метод наименьших квадратов» дается применение метода наименьших квадратов для обработки результатов наблюдения и определения коэффициентов эмпирических формул. Гл. 9 «Элементы номографии» содержит основные сведения по номографии, простейшие методы построения номограмм со сдвоенными шкалами, номограмм из выравненных точек, сетчатых номограмм и более сложных составных номограмм и номограмм с бинарными полями.

Изложение сопровождается подробно рассмотренными примерами. В каждой главе имеются упражнения и лабораторные работы с подробными инструкциями и задачами. Особое внимание уделяется вопросам экономного ведения счета и рационального оформления его результатов, контроля в процессе вычисления и проверки правильности его. Изложение ясное и сопровождается полезными указаниями практического характера. В приложении дана таблица значений коэффициентов для интерполяционной формулы Грегори—Ньютона. Библ. 73 назв. Н. Я. Лященко

ТАБЛИЦЫ

11 В307. Числовые таблицы для вычисления устойчивых вынужденных колебаний кусочно-линейных систем. Maezawa Seiichiro. Numerical tables for calculating stead, forced vibration of piecewise-linear system. «Яманаси дайгаку когакубу кэнкю хококу, Repts Fac. Engng Yamanashi Univ.», 1960, № 11, 26—36 (англ.)

Протабулированы с 4—5 десятичными знаками несколько функций, связанных с решением дифференциального уравнения

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + g(x, \dot{x}) = f\cos\omega t.$$

11 В308. Таблица непрерывной недифференцируемой функции Вейерштрасса. Salzer Herbert E., Levine Norman. Table of a Weierstrass continuous nondifferentiable function. «Math. Comput.», 1961, 15, № 74, 120—130 (англ.)

Приведена с 12 десятичными знаками таблица значений функции

$$W(x) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \cos(7^n \pi x)/2^n$$

для $x = 0{,}000\,(0{,}001)\,0{,}500$.

11В309. Краткая таблица интегралов $\int_x^\infty J_0(t)\,t^{-n}dt$ и $\int_x^\infty J_1(t)\,t^{-n}\,dt$. Longman I. M. A short table of $\int_x^\infty J_0(t)\,t^{-n}dt$ and $\int_x^\infty J_1(t)\,t^{-n}dt$. «Math. Tables and Other Aids Comput.», 1959, 13, № 68, 306—311 (англ.)

В геофизике встречаются задачи, в которых требуется вычисление интегралов вида

$$L = \int_x^\infty J_0(t)\,g(t)\,dt, \qquad (1)$$

$$M = \int_x^\infty J_1(t)\,g(t)\,dt, \qquad (2)$$

где x — некоторое положительное число, а $g(t)$ — монотонно убывающая функция от t при достаточно больших t. Автор предлагает метод табулирования интегралов (1) и (2), когда функция $g(t)$ для достаточно больших t допускает разложение

$$g(t) = a_0 + a_1 t^{-1} + a_2 t^{-2} + \ldots \qquad (3)$$

После подстановки (3) в (1) и (2) дело сводится к вычислению интегралов

$$L_n = \int_x^\infty J_0(t)\,t^{-n}dt, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$M_n = \int_x^\infty J_1(t)\,t^{-n}dt, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Для вычисления L_n и M_n используются формулы

$$L_n = -x^{-n}J_1(x) + (n+1)\,M_{n+1},$$

$$M_n = x^{-n}J_0(x) - nL_{n+1},$$

$$L_{n+2} = \frac{J_0(x)}{(n+1)\,x^{n+1}} - \frac{J_1(x)}{(n+1)^2 x^n} - \frac{L_n}{(n+1)^2},$$

$$M_{n+2} = \frac{J_0(x)}{n(n+2)\,x^n} + \frac{J_1(x)}{(n+2)\,x^{n+1}} - \frac{M_n}{n(n+2)}$$

и существующие таблицы для L_0 и L_1 (РЖ Мат, 1956, 8374К). Приводятся следующие таблицы: I. Таблица интегралов L_n с шестью десятичными знаками при $x = 1\,(1)\,10$, $n = 0\,(1)\,22$; II. Таблица интегралов M_n с шестью десятичными знаками при $x = 1\,(1)10$; $n = 0(1)22$.
М. К. Керимов

11В310. Форма спектральных линий: таблицы для контура Фойгта $\frac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-y^2}dy}{a^2+(v-y)^2}$. Posener D. W. The shape of spectral lines: tables of the Voigt profile $-\frac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-y^2}dy}{a^2+(v-y)^2}$., «Austral. J. Phys.,» 1959, 12, № 2, 184—196 (англ.)

Излагаются некоторые методы расчета интенсивности распределений спектральных линий, выражающейся в

виде интеграла

$$H(a, v) = \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-y^2} dy}{a^2 + (v - y)^2}.$$

Функция $H(a, v)$ связана с интегралом вероятностей в комплексной области при помощи соотношения

$$H(a, v) = 2\pi^{-1/2} \operatorname{Re} \left\{ e^{z^2} \int_z^{\infty} e^{-t^2} dt \right\},$$

где $z = a + iv$. Для вычисления значений $H(a, v)$ при $a \geqslant 4$ и $v/a \leqslant \frac{1}{2}$ используется асимптотический ряд. Для вычисления значений $H(a, v)$ при $v < 5 - 2a$ и $a < 1{,}2$ используются ряды, а при других значениях — квадратурная формула Гаусса—Эрмита. Таблица составлена для $H(a, kw)/H(a, 0)$, причем w определяется из соотношения $H(a, w) = \frac{1}{2} H(a, 0)$, а значения $H(a, 0)$ находятся при помощи аппроксимации полиномами и таблиц интеграла вероятностей. Таблицы составлены с пятью десятичными знаками при $a = 0{,}00(0{,}01)0{,}10(0{,}02)0{,}30(0{,}05)1{,}0.(0{,}10)2{,}00(0{,}20)3{,}00(0{,}50)5{,}00(1{,}00)10{,}00$ и ∞, а также при $k = 0{,}0(0{,}1)2{,}0(0{,}2)3{,}0(0{,}5)8{,}0(1{,}0)10{,}0$ и 12,0; 15,0; 20,0. В той же таблице даются соответствующие значения с пятью десятичными знаками для $H(a,0)$ и w. М. К. Керимов

11 В311. Интегрирование постоянных скоростей, зависящих от температуры. Vallet Pierre. Intégration des constantes de vitesse par rapport à la température. «C. r. Acad. sci.», 1959, 249, № 6, 823—825 (франц.)

Работа посвящена табулированию некоторых интегралов, которые встречаются в исследованиях по химической физике. Рассматриваются три случая.

1) Для табулирования интеграла $J_n(z) = \int_z^{\infty} z^{-n} e^{-z} dz$ предлагается использовать формулу

$$J(z) = z^{-z} e^{-z} [1 - 2!z^{-1} + \ldots + (-1)^n (n-1)! z^{-n+2}] + (-1)^n n! J_{-n-1}, \quad (1)$$

причем $J_{-n} = \int_z^{\infty} z^{-n} e^{-z} dz$, $J(z) = J_{-z}$. Формула (1) годна для вычислений при $z > 30$. Для значений $z < 30$ можно использовать формулу

$$J(z + h) = J(z) - z^{-z} e^{-z} [1 - e^{-h} - 2!z^{-1} e^{-h} R_2 + 3!z^{-2} e^{-h} R_3 + \ldots + (-1)^n (n+1)! z^{-n} e^{-h} R_{n+1} + \ldots],$$

где R_{n+1} — остаточный член в разложении e^h в степенной ряд.

2) Для больших значений z интеграл

$$M(z) = \int_z^{\infty} z^{-\frac{5}{2}} e^{-z} dz$$

можно вычислить по формуле

$$M(z) = z^{-\frac{5}{2}} e^{-z} \left[1 - \frac{5}{2z} + \frac{5 \cdot 7}{(2z)^2} - \frac{5 \cdot 7 \cdot 9}{(2z)^3} + \ldots + (-1)^n \frac{5 \cdot 7 \ldots (2n+3)}{(2z)^n} \right] + (-1)^{n+1} \frac{5 \cdot 7 \ldots (2n+5)}{2^{n+1}} M_{-n-\frac{7}{2}};$$

при малых z можно использовать формулу

$$\Delta M(z) = -z^{-5/2} e^{-z} \left[1 - e^{-h} - \frac{5}{2z} e^{-h} R_2 + \frac{5 \cdot 7}{(2z)^2} e^{-h} R_3 + \ldots + (-1)^n \frac{5 \cdot 7 \cdot 9 \ldots (2n+3)}{(2z)^n} e^{-h} R_{n+1} + \ldots \right].$$

3) Приводится извлечение из таблиц, составленных для вычисления $J(z)$, $M(z)$ и $z^{-z}e^{-z}$. Указывается, что таблицы составлены для $J(z)$ при $z = 1(0{,}1)50(1)200$ и для $M(z)$ при $z = 1(0{,}1)50(1)100$. В приводимом извлечении из таблиц все значения табулируемых функций приведены с восемью значащими цифрами.

М. К. Керимов

11 В312. Дебаевская характеристическая температура гексагональных кристаллов при 0°К. Wolcott Norman M. Debye θ of hexagonal crystals at 0°K. «J. Chem. Phys.», 1959, 31, № 2, 536—540 (англ.)

Дебаевская характеристическая температура θ_0 определяется по формуле

$$\theta_0^3 = (h/k)^3 (3N/4\pi V) U_m^3,$$

где $U_m^3 = (c_{44}/\rho)^{3/2} \{3/[q^{-1} + f(r, s, t)]\}$. В работе приводятся таблицы для $f(r, s, t)$ с шестью десятичными знаками при $r = 1(1)10$; $s = 1(1)10$; $t = 0{,}0(0{,}1)09$. Таблицы предназначены для вычисления значений θ_0. Линейная интерполяция по таблицам позволяет получить значения θ_0 с точностью до 1%. Приводится таблица, в которой сравниваются проинтерполированные значения f и θ_0 с экспериментальными значениями θ_0.

М. К. Керимов

11 В313. Таблицы абсцисс и весов для приближенного вычисления интегралов вида $\int_0^{\infty} e^{-x} x^n f(x)\, dx$. Rabinowitz Philip, Weiss George. Tables of abscissas and weights for numerical evaluation of integrals of the form $\int_0^{\infty} e^{-x} x^n f(x)\, dx$. «Math. Tables and Other Aids Comput.», 1959, 13, № 68, 285—294 (англ.)

Многие задачи физики сводятся к вычислению интегралов вида $\int_0^{\infty} x^n e^{-x} f(x)\, dx$; эти интегралы можно вычислить по квадратурной формуле Гаусса

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-x} f(x)\, dx = \sum_{k=0}^{N} a_{kN}^n f(x_{kN}^n) + E,$$

где

$$E = \frac{N!\,(N+n)!}{(2N)!} f^{(2m)}(\xi).$$

Абсциссы x_{kN}^n являются корнями уравнения $L_N^n(x) = 0$, а коэффициенты a_{kN}^n (веса) определяются по формуле

$$a_{kN}^n = \frac{1}{x_{kN}^n} \frac{1}{\left[L_N^{n'}(x_{kN}^n)\right]^2},$$

где

$$L_N^n(x) = \sum_{m=0}^{N} \binom{N+n}{N-m} \frac{(-x)^m}{m!}$$

— обобщенный полином Лагерра, а $L_N^{n'}$ — ее производная. В работе содержатся таблицы абсцисс, весов и произведений весов на $\exp(x_{kN}^n)$. Таблицы составлены 18 значащими цифрами для $n=0(1)5$, причем в случае $n=0$ N меняется в пределах $N=4(4)32$, а в случае $n>0$ — в пределах $N=4(4)16$. В качестве примера по использованию этих таблиц вычисляется структурная сумма

$$T_{r,s,t}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{n^r m^s}{(m^2+n^2)^t},$$

которая преобразуется к виду

$$T_{r,s,t}=\frac{1}{\Gamma(t)}\int_0^{\infty}u^{t-1}\sigma_r(u)\,\sigma_s(u)\,du,$$

где

$$\sigma_r(u)=\sum_{n=1}^{\infty}n^r e^{-n^2u}.$$

М. К. Керимов

11 В314 К. Четырехзначные таблицы трансцендентных функций. Flügge W. Four-place tables of transcendental functions. London, Pergamon Press, Ltd, 1954. 136 pp., 25 sh. (англ.)

Книга предназначена для широкого круга научно-технических работников, которым в процессе работы приходится вести много вычислений с небольшой точностью. В ней приведены таблицы почти всех важнейших трансцендентных функций. Кроме того, в каждом разделе приведено много формул, относящихся к функциям, рассматриваемым в данном разделе; библиография табличной литературы дана в конце каждого раздела. В книге приведены таблицы: $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{tg} x$ для $x=0°(1°)89°$; $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$ для $x=0{,}0(0{,}1)10{,}0$ и $\operatorname{th} x$ для $x=0{,}0(0{,}1)5{,}0$; e^x-1 для $x=0{,}00(0{,}01)0{,}20$; $1-e^{-x}$ для $x=0{,}00(0{,}01)0{,}20$; e^x и e^{-x} для $x=0{,}0(0{,}1)10{,}0$; $\ln x$ для $x=1{,}0(0{,}1)10{,}0$; $I_0(x)$ при $x=0{,}0(0{,}1)10{,}0$; $J_1(x)$ при $x=0{,}0(0{,}1)10{,}0$; $J_1(x)$ при $x=0{,}0(0{,}1)10{,}0$; $Y_0(x)$ и $Y_1(x)$ при $x=0{,}0(0{,}1)10{,}0$; $I_0(x)$ и $I_1(x)$ при $x=0{,}0(0{,}1)10{,}0$; $K_0(x)$ и $K_1(x)$ при $x=0{,}0(0{,}1)10{,}0$; $\operatorname{ber} x$ и $\operatorname{bei} x$ при $x=0{,}0(0{,}1)10{,}0$; $\operatorname{ber}' x$ и $\operatorname{bei}' x$ при $x=0{,}0(0{,}1)10{,}0$; $\operatorname{ker} x$ и $\operatorname{kei} x$ при $x=0{,}0(0{,}1)10{,}0$; $\operatorname{ker}' x$ и $\operatorname{kei}' x$ при $x=0{,}0(0{,}1)10{,}0$; $F(x,y)$ и $E(x,y)$ при $x=0°(1°)90°$ и $y=0°(1°)90°$; $\operatorname{erf} x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x\exp(-s^2)\,ds$ при $x=0{,}00(0{,}01)1{,}00$; $1-\operatorname{erf} x$ при $x=1{,}0(0{,}1)3{,}0$

$$C(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x\frac{\cos s}{\sqrt{s}}\,ds,\quad S(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x\frac{\sin x}{\sqrt{s}}\,ds \text{ при } x=0{,}0(0{,}1)10{,}0;$$

$$Cix=-\int_x^{\infty}\frac{\cos s}{s}\,ds,\quad Six=\int_0^x\frac{\sin s}{s}\,ds \text{ при } x=0{,}0(0{,}1)10{,}0;$$

$Ei(-x)$ при $x=0{,}0(0{,}1)10{,}0$; $\Gamma(x)=y!$ при $x=1{,}00(0{,}01)2{,}00$ и $y=0{,}00(0{,}01)1{,}00$.

М. К. Керимов

11 В315. Формулы и таблицы для интегралов цилиндрических функций Ханкеля. Gorup V. G. Formeln und Tabellen für ein den Hankelschen Zylinderfunktionen verwandtes Integral. «Mitt. Max-Planck-Inst. Strömungsf.», 1957, 15, 58 p. S (нем.)

Исследованы функции

$$T_n(z)=\int_0^{\infty}e^{-nt}e^{-z\operatorname{ch}t}dt,$$

$$S_n(z)=e^zT_n(z)=e^zK_n(z)-R_n(z),$$

где $K_n(z)$ — функция Бесселя и $R_n(z)$ — полином степени n от $1/z$. Таблицы даны только для случая $z=-ik$. Автор рассматривает соотношение

$$S_n(-ik)=\alpha_n(k)+i\beta_n(k)=\int_0^{\infty}e^{-nt}e^{ik(\operatorname{ch}t-1)}\,dt,$$

где α_n, β_n удовлетворяют условиям

$$\alpha_{n+1}=\alpha_{n-1}-\frac{2}{k}n\beta_n,$$

$$\beta_{n+1}=\beta_{n-1}-\frac{2}{k}(1-n\alpha_n).$$

Здесь

$$\alpha_0+i\beta_0=\frac{1}{2}\pi e^{ik}\{-Y_0(k)+iJ_0(k)\},$$

$$\alpha_1+i\beta_1=\frac{1}{2}\pi e^{ik}\{-J_1(k)-iY_1(k)\}-\frac{i}{k},$$

J_0, Y_0, J_1, Y_1 — функции Бесселя. Протабулированы с восемью десятичными знаками значения $\operatorname{Re}T_n$, $\operatorname{Im}T_n$, α_n, β_n, $n^{-1}-\alpha_n$ для $n=0(1)40$ и $k=0{,}001$; 0,002; 0,005; 0,01 (0,01) 0,06 (0,02) 0,1 (0,1) 2 (1) 0,7. Описан процесс вычисления. J. C. P. Miller

Перевод из Math. Revs, 1958, 19, № 11, 1197

11 В316 К. Четырехзначные логарифмические таблицы для 90°-го разбиения. Schaefer Werner. Vierstellige Logarithmen und Zahlentafeln für die 90°— Teilung. München, Lindauer, 1960, IX S., 70 Bl., 4.40 DM «Dtsch. Nationalbibliogr.», 1961, **A**, № 17, 1350 (нем.)

11 В317 К. Шестизначные таблицы логарифмов чисел и тригонометрических функций и навигационные таблицы. Friocourt Georges. Tables de logarithmes à six décimales pour les nombres et les lignes trigonométriques et tables de navigation. Paris, Eds marit. et colon., 1960, XXIV, 288, XVIII, 105 p., 20 NFr. «Bibliogr. France», 1961, **150**, № 16, 449 (франц.)

11 В318 К. Пятизначные логарифмы и другие математические таблицы. Müller Fritz. Fünfstellige Logarithmen- und andere mathematische Tafeln. Bearb. 8. Aufl. Leipzig, Fachbuchverlag, 1961, VII, 206 S., 6.80 DM «Dtsch. Nationalbibliogr.», 1961, **A**, № 16, 1289 (нем.)

11 В319 К. Семизначные логарифмы тригонометрических функций. Rottmann Karl. Siebenstellige Logarithmen der trigonometrischen Funktionen. Mannheim, Bibliogr. Inst., 1961, 440 S., 9.80 DM «Dtsch. Nationalbibliogr.», 1961, **A**, № 15, 1212 (нем.)

11 В320 К. Таблицы радиальных интегралов теории атомных спектров. Ванагас В. В., Глембоцкий И. И., Ушпалис К. К. М., Вычисл. центр АН СССР, 1960, 381 стр., илл., 4 р. 24 к.

В книге пригодятся численные значения с шестью десятичными знаками величин

$$V(ab;\gamma)=\lg\begin{bmatrix}a & b\\ \gamma & 1\end{bmatrix}$$

и

$$W(ab;\gamma)=\lg\begin{Bmatrix}a & b\\ 1 & \gamma\end{Bmatrix},$$

где $\begin{Bmatrix}a & b\\ 1 & \gamma\end{Bmatrix}=\gamma^{b+1}\begin{bmatrix}a & b\\ 1 & \gamma\end{bmatrix}$, $\gamma=\frac{\beta}{\alpha}$, для всех целых положительных чисел a и b, $0\leqslant a+b\leqslant 16$, при $\gamma=0{,}000$; 0,002; 0,004; ...; 1,000.

11 В321 К. Математические таблицы. Том 3. Таблицы обобщенных показательных функций. Miller G. F. Mathematical tables. Vol. 3. Tables of generalized exponential integrals. London, H. M. S. O., 1960, III+41 pp., 7 sh. 6 d. (англ.)

Книга посвящена табулированию обобщенной интегро-экспоненциальной функции

$$E_n(x)=\int_1^\infty \frac{e^{-xt}}{t^n}\,dt.$$

Учитывая удобства при табулировании, компактность таблиц и потребности практических расчетов, автор составил таблицы для функции $F_n(x)=(x+n)\,e^x E_n(x)$. Таблицы точны до 0,6 единиц последнего десятичного знака. Для интерполяции можно пользоваться формулой Эгеретта со вторыми и четвертыми модифицированными разностями (значения этих разностей пригодятся в таблицах). Пригодятся следующие таблицы функции $F_n(x)$ с восемью десятичными знаками

для $x=0\,(0{,}01)\,1$, $n=1,2,\ldots,8$;

для $x=0\,(0{,}1)\,20$, $n=1,2,\ldots,24$;

для $1/x=0\,(0{,}001)\,0{,}05$, $n=1,2,\ldots,24$.

В начале книги описываются уже существующие таблицы рассматриваемой функции и пригодится много полезных формул (интегральные представления, ряды, асимптотические разложения и т. п.). М. К. Керимов

11 В322 К. Математические таблицы. Т. 4. Таблицы функций Вебера параболического цилиндра и других функций для больших аргументов. Fox L. Mathematical tables. Vol. 4. Tables of Weber parabolic cylinder functions and other functions for large arguments. London, H. M. S. O., 1960, III, 40 pp., ill., 12 sh. 6 d. «Brit. Nat. Bibliogr.», 1961, № 576, 11 (англ.)

В книге содержатся таблица интегро-экспоненциальной функции $E_i(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{e^t}{t}\,dt$, $-Ei(-x)=\int_x^\infty\frac{e^{-t}}{t}\,dt$,

таблицы интегрального синуса и косинуса $\mathrm{Si}(x)=\int_0^x\frac{\sin t}{t}\,dt$,

$\mathrm{Ci}(x)=\int_\infty^x\frac{\cos t}{t}\,dt$, таблица интегралов Эйри

$$A_i(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\cos\left(\frac{1}{3}t^3+xt\right)dt,$$

$$\mathrm{Bi}(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left\{\exp\left(-\frac{1}{3}t^3+xt\right)+\sin\left(\frac{1}{3}t^3+xt\right)\right\}dt,$$

таблица интеграла вероятностей

$$\alpha(x)=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\int_0^x e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt,$$

факториальные функции, функции Вебера параболического цилиндра

$$W(a,x)=\left(\frac{2k}{x}\right)^{1/2}f\cos x,\quad W(a,-x)=\left(\frac{2}{kx}\right)^{1/2}f\sin x,$$

$$\chi=\varphi+\frac{1}{4}x^2-a\ln x+\frac{1}{2}\varphi_2+\frac{1}{4}\pi;$$

$$\frac{d}{dx}W(a,x)=-\left(\frac{kx}{2}\right)^{1/2}g\cos\psi,$$

$$\frac{d}{dx}W(a,-x)=-\left(\frac{x}{2k}\right)^{1/2}g\sin\psi,$$

$$\psi=\omega+\frac{1}{4}x^2-a\ln x+\frac{1}{2}\varphi_2-\frac{1}{4}\pi,\quad z=\frac{1}{x},$$

$$k=(1+e^{2\pi a})^{1/2}-e^{\pi a},\quad \varphi_2=V\ln\Gamma(1/2+ia).$$

В таблицах пригодятся значения функций f, g, ω с в семью десятичными знаками для $z=0\,(0{,}005)\,0{,}100$ $a=-10\,(1)\,10$, причем $z=x^{-1}$, а для φ_2 дается табл ца значений и ее вторых и четвертых модифицирова ных разностей при $a=0\,(0{,}05)\,10{,}0$. Пригодятся так таблицы всех разностей, необходимых при интерпол рировании.

11 В323 К. Таблицы функций Уиттекера (волновы функции в кулоновом поле). Tables of Whittaker funct ons (wave functions in Coulomb field). Rept. Nume Computat. Bur. Tsuneta Yano Memor. Soc., 1956, 67 p (англ.)

Книга является вторым томом, посвященным функц ям Уиттекера (том I был издан под № 8 в 1954 Токийским вычислительным центром). Речь идет о т булировании функции

$$W=W_{i\xi,\frac{1}{2}}(-ix)$$

или модифицированной функции

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}x\xi+i\sigma(\xi)\right\}W=G_\xi(x)+iF_\xi(x),$$

где $\sigma(\xi)=\arg\Gamma(1-i\xi)$. На интервале $0<x<1$ вмест G удобнее табулировать функцию $\Gamma_\xi(x)$, определяему равенством

$$[F_\xi'(0)]^2\{\Gamma_\xi(x)-G_\xi(x)\}=\xi\log x F_\xi(x).$$

Модификации для абсолютного значения и аргумент функции W, а также ее производной относительно определяются равенствами

$$U_\xi(x)=|G+iF|,\quad U_\xi(x)=2|F'-iG'|,$$

$$\Phi_\xi(x)=\arg(F+iG)-\omega_\xi(x),$$

$$\Psi_\xi(x)=\arg(F'-iG')-\omega_\xi(x),$$

где $\omega_\xi(x)=\sigma(\xi)+\frac{1}{2}x+\xi\log x$. Приводятся следующи таблицы с шестью десятичными знаками и со вторым центральными разностями: I. Таблица значений F, F' Γ, Γ' для $\xi=0\,(0{,}02)\,0{,}5\,(0{,}05)\,1$ и $x=0\,(0{,}05)$ II. Таблица значений F, F', G, G', для $\xi=0\,(0{,}02$ $0{,}5\,(0{,}05)\,1$ и $x=1\,(0{,}05)\,2\,(0{,}1)\,5$; III. Таблица зна чений U, V, Φ, Ψ для $\xi=0{,}1\,(0{,}1)\,1$ и $x^{-1}=0\,(0{,}05)0{,}2$ Имеется опечатка на стр. 5 (вместо ξ написано y). Таб лицы прекрасно изданы и могут быть очень полезны D. H. Lehme

Перевод из Math. Revs, 1957, 18, № 5, 421

См. также: 11Б195, 11Б222, 11Б309 К, 11В38, 11В47 11В60, 11В67, 11В70, 11В75, 11В82, 11В98, 11В128 К 11В145, 11В146, 11В200, 11В216, 11В326

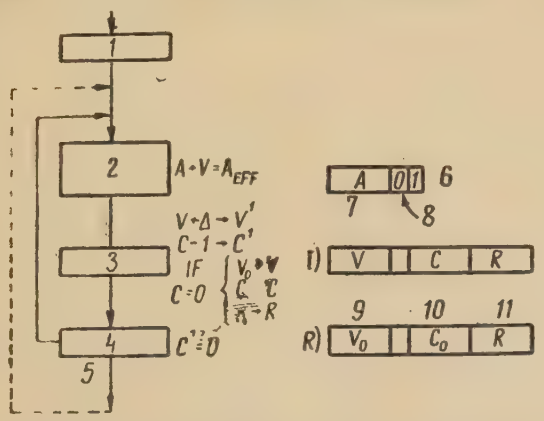
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРИБОРЫ

Редактор *Д. Ю. Панов*

11 В324. Обработка данных с использованием техники управляющих слов. Blaauw G. A. Data handling by control word techniques. «Proc. East. Joint Comput. Conf., Philadelphia, Pa», 1958. NT-114. New York, 1959, 75—79 (англ.)

Описывается метод более общей и гибкой организации выполнения вспомогательных операций, связанных с преобразованием переменных адресов в программе. Он основан на введении дополнительной информации в регистр индекса и большего количества встроенных операций. Для полного задания преобразования адресов в программном цикле требуется задание текущего значения индекса, шага его изменения, счетчика числа повторений, начального значения индекса и начального значения счетчика числа повторений. В описываемом методе задание значения индекса и счетчика числа повторений производится отдельными группами двоичных разрядов так называемого управляющего слова. Третья группа двоичных разрядов управляющего слова задает другое управляющее слово. Эта последняя группа разрядов, или группа «замещения» (refill field) служит для связи управляющего слова со следующим используемым управляющим словом, позволяя образовывать цепочки управляющих слов. В случае обычного цикла с переадресацией группа «замещения» задает адрес второго управляющего слова, в котором группы значения индекса и счетчика содержат начальные значения индекса и счетчика. Таким образом, в дополнение к уже имеющимся машинным операциям изменения адреса, изменения значения индекса, изменения счетчика и проверки на окончание, вводится новая машинная операция замены индексного слова (слова, содержащего значение индекса и счетчика) словом, задаваемым адресом «замещения». Эта операция, являющаяся обычно условной, может комбинироваться с другими операциями, например, в команде изменения значения индекса, счетчика и замещения. Условием ее применения является, например, достижение нулевого значения счетчика.

Рис. 1 иллюстрирует применение управляющих слов



1. Подготовка. 2. Модификация адреса. 3. Изменение модификации. 4. Передача управления. 5. Конец. 6. Команда. 7. Адрес. 8. Операция с индексом. 9. Значение индекса. 10. Значение счетчика. 11. Адрес замещения.

для простого цикла с переадресацией. Наличие операции замещения исключает этап засылки начальных значений, необходимый при повторном использовании программного цикла. Этап подготовки означает, что выполнение программы должно начаться с правильными первоначальными значениями обоих управляющих слов. Одинаковое значение адреса замещения в обоих управляющих словах определяет использование одного и того же начального управляющего слова. В более сложных случаях можно использовать целую цепь управляющих слов.

Использование управляющих слов оказывается удобным и во многих других случаях, например, при передачах данных, упорядочении данных в накопителе (внесение и извлечение данных из упорядоченных последовательностей и др.). Если принять шаг переадресации равным единице, а значение индекса за действительный адрес, то управляющее слово может определять массив слов в памяти. Такое использование управляющих слов очень удобно при прямых передачах данных между входными-выходными устройствами и оперативной памятью и позволяет избежать специальных буферных массивов памяти и пересылок в эти буферные массивы. Команда ввода-вывода в этом случае определяет используемое входное или выходное устройство и адрес управляющего слова. С помощью управляющих слов легко организовать цикл ввода — обработки — вывода данных с массивами, расположенными в любых частях памяти и циклически меняющих свои функции. Другое важное применение управляющие слова находят в операциях по упорядочению данных, в которых передача массивов данных заменяется передачей управляющих слов, определяющих эти массивы. Внесение и извлечение массивов данных из упорядоченной последовательности этих массивов может легко производиться путем взаимного обмена содержимого двух или группы слов, задаваемого специальной командой «swap». В применении к управлению подпрограммами управляющее слово может использоваться в команде вызова подпрограммы, например, из ЗУ на магнитной ленте, барабане или дисках и осуществлять преобразование адресов, связанное с помещением подпрограммы на произвольное место в память.

В. И. Смирнов

11 В325. Автоматическое программирование арифметических формул в скобочной символике с помощью адресующей функции. Pawlak Z. Automatic programming of arithmetical formulae in parenthesis notation by the addressing function. «Bull. Acad. polon. sci. Sér. sci. techn.», 1960, 8, № 6, 315—319 (англ., рез. русск.)

Рассматривается применение идей автора, описанных ранее (Pawlak Z., Bull. Acad. polon. sci., Ser. sci. techn., 1960, 8, 41), к автоматическому программированию формул. Адресующая функция ставит в соответствие каждому допустимому символу формулы (символ переменной, символ операции (Δ_l) и скобки (,)) целое число, определяемое следующими правилами:

$$F(\rho_l(\Phi)) = 1$$

$$F(\rho_{l+1}(\Phi)) = \begin{cases} E(F\rho_l(\Phi))/2, & \text{если } \rho_l(\Phi) = \Delta_l \text{ или}, \\ 2F(\rho_l(\Phi)), & \text{если } \rho_l(\Phi) = (\ , \\ 2F(\rho_l(\Phi)) + 1, & \text{если } \rho(\Phi) = \Delta_l, \end{cases}$$

где $\rho_l(\Phi)$ — символ с порядковым индексом l.

Оказывается, что если $\rho_l(\Phi)$ является символом операции, то значение адресующей функции $F(\rho_l(\Phi))$ равно адресу результата операции, выполненной над аргументами с адресами $2F$ и $2F + 1$. Таким образом, можно ввести одноадресную псевдокоманду, которая означает следующее: Выполнить операцию, определяемую операционной частью команды, над аргументами с адресами $2n$ и $2n + 1$ и поместить результат по адресу n, где

a — адресная часть команды. На программирующую программу автор перекладывает следующие функции: 1) Последовательный просмотр символов формулы и вычисление адресующей функции; 2) Формирование арифметических команд для символов операций с операционной частью, равной номеру просматриваемого символа, и адресной частью, равной значению адресующей функции, и сохранение этих команд в последовательных ячейках памяти, начиная с p, где $p>\max F(p_i(\Phi))$; 3) Формирование команд пересылки с адресной частью, равной значению адресующей функции для символов переменных и сохранение этих команд в последовательных ячейках памяти, начиная с k, где $k>p+r-1$, а r — число переменных в формуле; 4) Расставление арифметических команд в порядке уменьшения значений их адресов; 5) Запоминание с помощью команд пересылки уже образованных значений переменных (предполагается ради простоты, что данные вводятся в последовательности их появления в формуле); 6) Выполнение последовательности арифметических команд с помощью интерпретирующей программы. Обсуждается вариант определения адресующей функции, позволяющей более полно использовать память. В. И. Смирнов

11 В326. Применение методов перевода формул к автоматическому программированию для обыкновенных дифференциальных уравнений. Cleave J. P. The application of formula translation to the automatic coding of ordinary differential equations. «Annual Rev. Automat. Programming. I. Working Conf. Automat. Programming Digit. Computers. Brighton, I sh — 3 rd Apr., 1959». Oxford — London — New York — Paris, Pergamon Press, 1960, 81—92 (англ.)

Рассматривается применение алгоритмов автоматического составления программы по заданной математической формуле для автоматического составления программы численного решения широкого класса систем обыкновенных дифференциальных уравнений в сочетании со стандартной программой интегрирования по методу Рунге — Кутта. Рассматривается расширение обычного алгоритма перевода формулы в программу, допускающего задание системы дифференциальных уравнений первого порядка в неявной форме определенного типа, а также уравнений выше первого порядка. В результате входной информацией для автоматического составления программы численного решения широкого круга обыкновенных дифференциальных уравнений может служить лишь математическая формула уравнения в нормальном математическом изображении. В. И. Смирнов

11 В327. Автоматическое программирование на ZRA 1. Kerner Immo O. Automatisches Programmieren auf ZRA 1. «Z. angew. Math. und Mech.», 1960, **40**, Sonderh., 76—78 (нем.)

Весьма кратко описываются методы автоматизации программирования, которые предполагается использовать для вычислительной машины ZRA 1 (Zeiss—Rechen—Automat). На основе краткого пояснения структурной схемы машины указываются возможные пути построения программы перевода с языка АЛГОЛ-60 на язык машины. Использование команд управления вводом со специальными отметками позволяет в сочетании со специальными подпрограммами осуществить замену символических адресов истинными адресами согласно таблице соответствия, автоматически составляемой при вводе. На основе полученного объема подпрограмм перевода нескольких типов знаков языка АЛГОЛ-60 производится весьма краткая сравнительная оценка использования способов интерпретации и компиляции для перевода выражений, записанных на языке АЛГОЛ-60, на язык машины и ожидаемые временные характеристики. В. И. Смирнов

11 В328. Перспективы автоматического программирования. Glennie A. E. Future trends in automatic programming. «Annual Rev. Automat. Programming. I. Working Conf. Automat. Programming Digit. Computers, Brighton. 1st — 3rd Apr., 1959». Oxford — London — New York — Paris, Pergamon Press, 1960, 8—15 (англ.)

Кратко отмечаются основные принципы работы современных систем автоматического программирования, их достоинства и недостатки по сравнению с ручным программированием в машинных командах. Отмечается, что языки современных систем автоматического программирования включают в качестве основного элемента предложения повелительного типа (команды). Однако системы автоматического программирования ближайшего будущего должны будут использовать языки со все увеличивающимся количеством пояснительных элементов. Это позволит сделать их более «обучаемыми» и способными к использованию языка, расширяемого в процессе работы. В. И. Смирнов

11 В329. Некоторые проблемы универсальных систем автоматического программирования. Redish K. A. Some problems of a universal autocode. «Annual Rev. Automat. Programming. I. Working Conf. Automat. Programming Digit. Computers, Brighton, 1st — 3rd Apr., 1959». Oxford — London — New York — Paris, Pergamon Press, 1960, 16—22 (англ.)

Приводятся аргументы в пользу создания универсальной системы автоматического программирования и рассматриваются возможности стандартизации на различных уровнях создания универсальных систем автоматического программирования для научных целей и целей обработки данных. В. И. Смирнов

11 В330. Поиск языка для описания поведения систем обработки информации. Bagley Philip R. «The pursuit of a language for expressing the behavior of information processing systems». (Letter to the editor). «Communs Assoc. Comput. Mach.», 1959, **2**, № 6, 1—4 (англ.)

Ставится вопрос о создании языка, удобного для задания задач независимо от методов, которыми может быть достигнуто решение задачи. Отмечаются недостатки существующих языков и формулируются основные требования к семантике и синтаксису такого языка и возможные пути его построения. В. И. Смирнов

11 В331. Метод использования ограниченного словаря английских глаголов для программирования вычислительной машины делового применения. A method for using a limited vocabulary of English verbs to instruct business type computers.—) «J. Mach. Account.», 1959, **10**, № 2, 27 (англ.)

Краткое сообщение о совместной разработке компилятора AIMACO (Air Materiel Command Automatic Compiler) двумя американскими организациями (Air Material Command) американского воздушного флота и отделения Ramington Rand корпорации Sperry Rand. AIMACO основывается на модификации системы Flow-matic, расширенной с целью использования вычислительных машин с разной адресностью команд и различной структурой слов (с фиксированной и переменной длиной слова). Первоначальный вариант будет использовать 30 английских глаголов. В. И. Смирнов

11 В332. Состояние работы по международному алгоритмическому языку АЛГОЛ. Naur P. Status of the work on the international algorithmic language ALGOL. «Codes Reactor Computat». Vienna, 1961, 415—420. Discuss., 421—426 (англ., франц., русск. и исп.)

Сообщается, что в январе 1960 г. на конференции в Париже был тщательно рассмотрен алгоритмический язык АЛГОЛ. Приводится список организаций, ведущих работу над языком АЛГОЛ. Написанные на языке АЛГОЛ алгоритмы будут систематически публиковаться в Communication of the Association for Computing Machinery в отделе, созданном специально для этой цели. Объявлено о выпуске в Германии справочники по использованию языка АЛГОЛ. С. А. Раскутин

11 В333. Выбор языка команд. Buchholz W. The selection of an instruction language. «Proc. West. Joint Comput. Conf., Los Angeles, Calif., 1958. NT—107. New York, 1959, 128—130 (англ.)

Кратко рассматриваются основные факторы, влияющие на выбор команд вычислительной машины. Приводятся примеры классических одно-, двух- и трехадресных структур команд (Вихрь, УНИВАК-Сайентифик, ИБМ-650, СЕАК). Отмечается неуклонное расширение набора команд. Необходимость увеличения объема сведений, включаемых в команды, разрешила спор о структуре команд, по мнению автора, в пользу одноадресной структуры команд. На примерах структуры команд машин ИБМ-701, ИБМ-704 и ИБМ-709 рассматривается эволюция одноадресной структуры команд. В качестве примера современного этапа развития одноадресной структуры команд кратко рассматриваются основные структуры команд лос-аламосской вычислительной машины (СТРЕТЧ). Приводимые примеры включают структуру команды для сложения массивов произвольной длины, команды передачи управления и типичной арифметической команды. Команда сложения массивов произвольной длины использует все 64 разряда основного слова машины и включает следующие функциональные группы разрядов: адрес (начало массива с точностью до положения двоичного разряда) 24 двоичных разряда, адрес индексного регистра 4 разряда, задание длины массива 6 разрядов, задание величины сдвига 7 разрядов, код операции 9 разрядов. Использование остальных разрядов не указывается. Команда условной передачи управления также использует все 64 двоичных разряда и содержит адрес проверяемого двоичного разряда, адрес команды, выбираемой при выполнении условий проверки — 19 разрядов, два индексных адреса по 4 разряда, осуществляющих независимую индексацию упомянутых адресов и код операции 9 разрядов. Арифметическая команда занимает половину основного слова, т. е. 32 разряда. В одном слове содержатся две арифметические команды. Адрес состоит из 18 двоичных разрядов, код операции 10 разрядов и адрес индекса 4 разряда. Указывается, что использование гибкого и мощного набора команд указанной машины сокращает длину программ в 3 раза по сравнению с машинами ИБМ-704 или ИБМ-709. Сложный язык упростит задачу программиста, хотя и задачи будут становится все более сложными. Язык команд является промежуточным языком между языком программиста и языком элементарных шагов управления внутри машины. Поэтому целесообразно введение двух этапов перевода, первый этап — перевод с суперязыка на язык машинных команд и второй — внутренний перевод команд в управляющие последовательности. На уровне потребителя может ощущаться необходимость разработки специализированных языков, облегчающих программирование конкретных классов задач. На уровне машины ясна необходимость гибкого и относительно неспециализированного языка.

В. И. Смирнов

11 В334. OMNIFORM 1 — программа общего назначения для быстродействующих вычислительных машин. — OMNIFORM 1 — a general-purpose program for high-speed computers. «Nat. Bur. Standards Techn. News Bull.», 1960, **44**, № 1, 8—9 (англ.)

Краткое описание назначения и особенностей программы OMNIFORM 1. Она представляет собою программу интерпретативного типа, разработанную в Национальном бюро стандартов и предназначенную в первую очередь для облегчения специализированных вычислений в области термодинамики и молекулярной физики.

В. И. Смирнов

11 В335. Программирование на УНИВАК с использованием компиляторов. Hammer Carl. Univac programming with compilers. «1 Congr. internat. cybernétique. Namur, 1956. Paris, Gauthier—Villars; Namur, Assoc. internat. cybernétique», 1958, 139—144 (англ.)

Краткое пояснение принципов работы компилятора УНИВАК и более подробное описание построения компилятора А-2 и его использования. В. И. Смирнов

11 В336. Анализ языков для вычислительных машин. — Taking stock of computer languages. «Automat. Data Process», 1960, **2**, № 10, 26—29 (англ.)

Краткий анализ систем автоматического программирования и основные тенденции их развития.

В. И. Смирнов

11 В337. Исследования по автоматическому программированию. Automatic programing studies. «Nat. Bur. Standards Techn. News Bull.», 1960, **44**, № 1, 6—7 (англ.)

Краткая характеристика способов, используемых для облегчения программирования в Вычислительной лаборатории Национального бюро стандартов США.

В. И. Смирнов

11 В338. Автоматическое кодирование для вычислительных машин. Young P. L. Automatic coding for computers. «Process Control and Automat.», 1959, **6**, № 3, 122—123 (англ.)

Краткое пояснение целей и принципов автоматического программирования на примере системы «Автокод» для вычислительной машины «Пегас». В. И. Смирнов

11 В339. Пример использования «Автокода» машины «Пегас» для проведения коммерческих расчетов. Ronaldson P. M. PEGASUS: an example of an autocoded program for sales analysis and forecasting. «Annual Rev. Automat. Programming. I. Working Conf. Automat. Programming Digit. Computers, Brighton, 1st—3rd Apr., 1959». Oxford — London — New York — Paris, Pergamon Press, 1960, 64—80 (англ.)

На примере несложного коммерческого расчета поясняется возможность использования «Автокода» машины «Пегас» для автоматизации программирования задачи (реф. 11 В340). Указывается, что применение «Автокода» резко упрощает проблему постановки задачи на машину. Программированию с использованием «Автокода» можно научить неопытного человека в течение двух дней. Это имеет особенно большое значение для организаций, которые только начинают использовать вычислительные машины. При рассмотрении конкретной коммерческой задачи приводится таблица записи данных, вводимых в машину; таблица выходных данных; блок-схема программы; пояснения к пользованию автокодом; подробное описание программы. Н. Н. Поснов

11 В340. Опыт применения «Автокода» машины «Пегас». Payne W. F. M. Operational experience with the PEGASUS autocode. «Annual Rev. Automat. Programming. I. Working Conf. Automat. Programming Digit. Computers, Brighton, 1st—3rd Apr., 1959». Oxford — London — New York — Paris, Pergamon Press, 1960, 58—63 (англ.)

Отмечаются следующие особенности «Автокода» машины «Пегас» (описание «Автокода» дано в реф. 11 В341): система кодирования удобна для ознакомления и проста в применении; предусмотрена возможность комбинирования команд «Автокода» с обычными машинными командами; использование «Автокода» влечет увеличение машинного времени, зато уменьшается время на программирование и отладку программ; использование программ автоматического кодирования уменьшает полезную емкость запоминающих устройств машины. Указывается, что после освоения «Автокода» стали отказываться от применения настольных вычислительных машин для проведения прикидочных расчетов. День или два, затрачиваемые на настольной машине, заменяются пятнадцатью минутами программирования и пятью минутами работы машины. Приведены два примера использования «Автокода» для решения практических задач. Отмечается, что система «Автокод», разработанная для программирования научных задач, ока-

залась применимой и для программирования коммерческих задач. Н. Н. Поснов

11 В341. Компилирующие, интерпретирующие и преобразующие программы для машины «Пегас». Felton G. E. Assembly, Interpretive and conversion programs for PEGASUS. «Annual Rev. Automat. Programming. I. Working Conf. Automat. Programming Digit. Computers, Brighton, 1st — 3rd Apr., 1959». Oxford — London — New York — Paris, Pergamon Press, 1960, 32—57 (англ.)

Описываются компилирующая, интерпретирующие программы и программа автоматического кодирования для машины «Пегас» фирмы «Ферранти» «Пегас» — машина среднего класса, имеющая два внутренних запоминающих устройства. Основное запоминающее устройство на магнитном барабане (7168 кодов). Оперативное запоминающее устройство состоит из 7 накопителей и 48 регистров. Машина работает в двоичной системе счисления (длина кода 39 разрядов) с фиксированной запятой. Скорость выполнения операций: сложение 315 мксек., умножение 2 мсек., деление 5,5 мсек. Ввод и вывод данных осуществляется с помощью бумажной перфоленты. Имеется запоминающее устройство на магнитной ленте. Дается очень краткое описание компилирующей программы машины, состоящей примерно из 1000 команд и постоянно хранящейся в основном запоминающем устройстве. Программа и подпрограммы, составленные программистом, со списком «реплик» вводятся в машину. Затем компилирующая программа просматривает список стандартных подпрограмм и нужные вводит в основную память машины, при этом, условные адреса в программе и подпрограммах заменяются на безусловные.

Указывается, что в машине уже в течение двух лет используется интерпретирующая программа для работы с удвоенными числами и с плавающей запятой. В этом случае мантисса числа располагается в двух ячейках памяти, а порядок в третьей ячейке. Операция сложения выполняется за 25—35 мсек., а операция умножения — за 50 мсек. В машине также используются интерпретирующие программы для работы с комплексными числами и операциями над матрицами. Интерпретирующая программа операций над матрицами описана более подробно. Приводится список матричных команд, пример матричной программы и таблица времени выполнения матричных команд. Достаточно подробно описывается «Автокод» машины «Пегас», который позволяет автоматизировать процесс программирования несложных математических задач. Приводятся таблицы вычислительных команд, команд ввода и вывода, команд перехода. В качестве примера приводится полная программа для составления таблиц биноминальных коэффициентов. Н. Н. Поснов

11 В342. Использование программ «Автокод», созданных для машины «Пегас», на вычислительной машине «Меркурий». Gibbons A. Running Pegasus autocode programs on Mercury. «Comput. J.», 1961, 3, № 4, 232—236 (англ.)

Описывается общий метод, при помощи которого упрощенный способ подготовки программ «Автокод», построенный для вычислительной машины «Пегас», может быть использован на машине «Меркурий». По этому методу, наряду с инструкциями «Автокода», в память машины «Меркурий» необходимо ввести еще описание инструкций «Автокода» и способы перевода их на язык машины «Меркурий». Указывается ряд проблем, возникающих при таком переводе. При использовании «Автокода» на машине «Меркурий» может быть получен выигрыш времени приблизительно в 25 раз. С. А. Раскутин

11 В343. Автомат с использованием маркируемых слов. Werler Karl-Heinz. Ein Automat mit gekennzeichneten Worten. «Z. angew. Math. und Mech.», 1960, **40**, Sonderh., 83—86 (нем.)

Рассматривается возможный вариант вычислительной машины (в. м.), машинным языком которой является язык математических формул. Структуру такой в. м. могут характеризовать следующие особенности: 1) В. м. использует слова, разделенные на классы, 2) слова разных классов отличаются специальными отметками (маркировка), 3) маркировка воспринимается в. м., 4) каждому классу слов соответствуют определенные действия в. м., 5) эти действия могут видоизменяться в зависимости от определенных условий, возникающих в в. м.

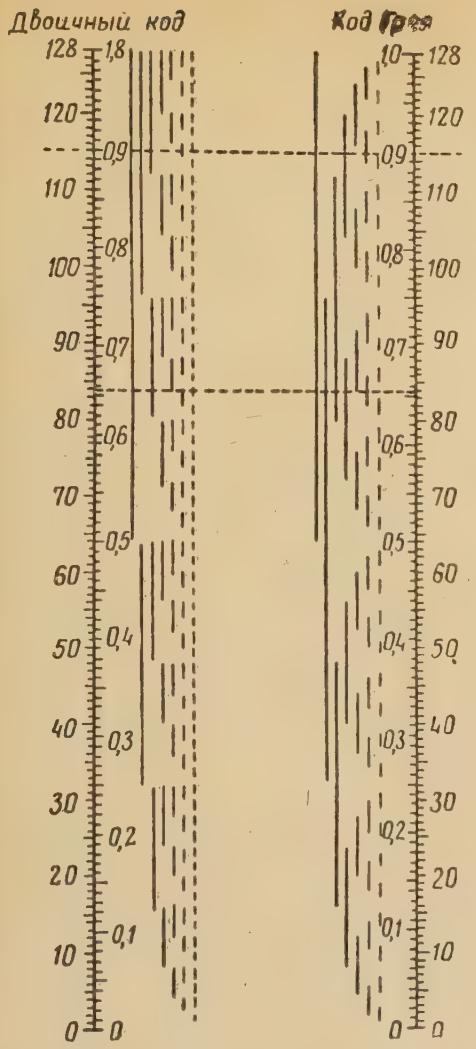
Необходимо выделить четыре класса слов: 1) Класс чисел (маркировка N). При наличии подклассов, соответствующих различным представлением чисел, используется более детальная маркировка. 2) Класс адресов (маркировка A), понимаемых как абсолютные адреса запоминающего устройства. 3) Класс символических адресов (маркировка S). С помощью таблицы соответствия, вводимой вместе с программой, символические адреса могут автоматически переводиться в абсолютные адреса. 4) Класс символов операций (маркировка Op). Здесь возможны, например, следующие подклассы: а) подкласс символов операций, которые могут выполняться сразу же, например, печать, б) подкласс символов операций, выполнение которых обусловливается выполнением определенных условий, например, выполнении операции сложения происходит при наличии в арифметическом устройстве обоих слагаемых. Алгоритм работы в. м. наглядно поясняется на примере вычисления простейшей формулы: $2 \cdot \pi \cdot R = V$. При использовании упомянутой выше маркировки программа в запоминающем устройстве выглядит следующим образом:

$$\boxed{|N2 \mid Opx \mid A{>}\pi{<} \mid Opx \mid SR \mid Op{=}: \mid SV \mid Op;|}$$

Содержимое счетчика слов в. м. соответствует первому слову данной программы. На основе содержимого счетчика слов устройство выборки выбирает первое слово из запоминающего устройства. Так как выбранное слово принадлежит к классу N, то оно отсылается в арифметическое устройство. К счетчику слов прибавляется единица и производится выборка следующего слова. По маркировке Op второго слова производится передача его в регистр операции, но непосредственного выполнения операции не производится, так как нет второго сомножителя. Снова следует $+1$ и выборка следующего слова. Выбранное слово в соответствии с маркировкой A направляется в устройство выборки, рассматривается как адрес и по нему задается выборка из запоминающего устройства. В случае, если выбранное по этому адресу слово принадлежит к классу N, оно направляется в арифметическое устройство. В случае символического адреса производится две последовательные выборки — первая за абсолютным адресом и вторая — за числом по выбранному абсолютному адресу. В данном простейшем примере порядок действий соответствовал порядку записанных операций. В общем случае формул необходимо введение указаний относительно порядка действий, например, скобок и расширение структуры в. м. с целью сохранения всех операций, адресов и промежуточных результатов, которые еще не могут быть выполнены или использованы. Структура такой машины была предложена Кеммерером (РЖМат, 1961, 7В304). В. И. Смирнов

11 В344. Диаграмма преобразования из десятичного кода в двоичный код и код Грея. Koch John G. 55 conversion chartdecimal to binary to Gray code. «Electron. Inds», 1960, **19**, № 8, 115 (англ.)

Приводится простая диаграмма (см. рисунок), позволяющая легко переводить десятичный код в двоичный код и в код Грея. Имеется возможность преобразовывать как целые числа, так и дроби. Диапазон чисел — 7 двоичных разрядов в любую сторону от запятой, однако этот диапазон может быть расширен простым продолжением диаграммы. Сначала на диаграмме находит-



ся точка, изображающая целую часть числа в десятичной форме. Через эту точку проводится горизонтальная линия. Пересечения ее с жирными вертикальными линиями соответствуют единицам в соответствующих разрядах двоичного кода или кода Грея. Если горизонтальная линия проходит через самую нижнюю точку вертикальной линии, то в соответствующем разряде ставится единица. Затем находится точка, изображающая дробную часть числа, и тем же способом производится отсчет дроби в двоичном коде. С. А. Раскутин

11 В345. Автоматическое составление словаря. Collin Andrew J. T. The automatic construction of a glossary. «Inform. and Control», 1960, 3, №3, 211-230 (англ.)

Составление алфавитного перечня всех различных слов какого-либо текста с указанием числа появлений каждого слова в тексте весьма просто производится вручную при помощи картотеки, в которой для каждого очередного слова или делается отметка на соответствующей карточке о его очередном появлении, или заводится новая карточка при первом появлении. При использовании для этой цели электронных вычислительных машин возникают, однако, трудности, связанные с ограничением объема запоминающего устройства. Первый способ, преодолевающий эти трудности, заключается в подразделении слов на некоторое число классов или групп и в составлении для последних частичных словарей, которые затем объединяются. Второй способ — «метод переполнения», предлагаемый в трех вариантах, заключается в помещении впервые встретившегося слова в нужное место памяти (в соответствии с алфавитным порядком), сдвиге всех ниже расположенных слов на одну ячейку и в перезаписи последнего слова, выходящего при сдвиге за пределы памяти, вместе с числом его появлений в просмотренной части текста, на перфоленту внешней памяти. Эта лента «переполнений» вводится затем, после первого прогона всего текста и вывода уже готового начала словаря из памяти, в качестве как бы «нового» текста. Подобный процесс продолжается до тех пор пока не будет образовываться лента переполнения. Подсчет времени, потребного для составления словаря на машине «Меркурий», показывает, что для ускорения расчетов среднее число различных слов в группе при использовании первого метода отнюдь не обязательно брать близким к числу ячеек памяти. Второй метод требует слишком много времени на сдвиги, если память машины не будет подразделена на некоторое число самостоятельных участков памяти — «страниц», отводимых для небольших групп слов. В этом последнем случае второй метод оказывается гораздо эффективней первого, поэтому для него дается подробное описание программы, составляющей словарь аналогично описанному выше, но только «постранично». Распределение памяти по «страницам» производится для групп слов, определяемых двумя первыми буквами, с учетом возможного объема каждой группы. В рассмотренном примере составление словаря для текста объемом в 45000 слов заняло 3 часа машинного времени, 3 недели ушло на перфорацию текста на телетайпе и около 20 часов на составление и отладку программы. На составление словаря вручную потребовалось бы около одного года. Еще более сложной задачей с точки зрения ограниченности объема памяти является автоматическое составление алфавитного указателя слов, в котором для каждого слова приведены номера тех страниц и строк текста, где оно встречается. Однако эта задача существенно облегчается, если для рассматриваемого текста уже составлен описанный выше словарь, так как память машины может быть в этом случае подразделена заранее на блоки нужного размера и сдвиги полностью исключаются. В предлагаемом описании программы основной частью является заполнение номерами страниц и строк тех блоков, которые отведены для очередной порции слов, помещенной в памяти машины. После прогона всего текста готовая часть указателя выводится на печать, а затем процесс продолжается для следующей части словаря. Еще эффективней явилась бы автоматизация составления словаря и указателя при помощи специальной машины для лингвистического анализа, обладающей очень большим запоминающим устройством с быстрым временем выборки и возможностью выполнения сдвига всей информации в памяти на несколько ячеек за одну короткую операцию. В. П. Черенин

11 В346. Значение семантических машин для научной документации. Общая постановка задачи и теоретические основы одного применения. Brygoo Pierre. Intérêt des machines sémanitiques pour la documentation dans les sciences. Données générales du problème et conception théorique d'une application. « I Congr. internat. cybernétique. Namur, 1956. Paris, Gauthier — Villars; Namur. Assoc. internat. cybernétique», 1958, 63—71 (франц.)

Содержание каждого документа и вопроса можно записывать в виде набора независимых характеристик — ключевых слов, выбираемых из довольно объемистого словаря, содержащего также и их кодовые обозначения.

До 34-кодовых обозначений характеристик документа может быть занесено в отдельные поля одной перфокарты. Поиск перфокарт, содержащих все характеристики вопроса и соответствующих в силу этого документам, которые отвечают на заданный вопрос, производится на картоскладочной машине. В. П. Черенин

11 В347. Информационные поиски: универсальные системы для обработки данных. Faden B. R. Information retrieval: general purpose data processing systems. «Spec. Libr.», 1959, **50**, № 8, 392—397 (англ.)

Возможность проведения информационных поисков на универсальных быстродействующих электронных вычислительных машинах может быть проиллюстрирована на одном простейшем примере, когда каждый документ и вопрос описываются некоторыми заданными множествами дескрипторов. Ввод совокупности закодированных дескрипторов очередного документа в оперативную память машины, сравнение на включение в эту совокупность заданного множества дескрипторов вопроса и печать номеров искомых документов могут выполняться по простейшей программе, три варианта которой приводятся для некоей гипотетической машины. В. П. Черенин

11 В348. Симпозиум по сбору, хранению и поискам информации. Adkinson B. W. Symposium on the collection, storage and retrieval of information. Informat. processing. Paris-München-London, 1960, 495-497 (англ.)

В четырех докладах дается краткий очерк состояния проблемы хранения и поисков информации в США, Западной Европе, Великобритании и СССР. По мнению Мочли (Mauchly), не только в США, но и в других странах до сих пор еще не вполне ясно представляют с чем, собственно, имеют дело, говоря об информационных поисках. К ним относится, в частности, и перевод с одного языка на другой. Однако, даже гораздо более простая задача — создание специальных стандартизированных языков программирования оказывается чрезвычайно сложной. Для решения проблемы отнюдь не достаточно просто более быстродействующих и дешевых машин. В США имеются сотни проектов решения различных аспектов проблемы поисков, включая и применение самообучающихся устройств. Последнему способствует появление микроминиатюрных элементов, что позволит примерно через десять лет создать экономичные логические системы, содержащие больше активных элементов, чем нейронов в человеческом мозге. Однако, в основном, все зависит от успехов в понимании языковых проблем индексирования и поисков. Подводя итоги недавней Международной конференции по автоматической документации, Питч (Pietsch) отмечает, что на Европейском континенте большинство исследователей обращает главное внимание на вопросы хранения, считая, что остальная часть машины должна быть как можно более простой. Современные универсальные быстродействующие вычислительные машины рассматриваются ими с точки зрения документации как чрезмерно сложные. Существующее коммерческое оборудование, хотя и применимо для поисков, однако, нуждается в дальнейшем развитии. Для разных документационных задач требуются различные механические системы. В настоящее время работа в Западной Европе не вышла еще из стадии исследования за исключением нескольких случаев для коллекций, содержащих несколько тысяч документов. Для больших коллекций намечается применение магнитных лент. Механизация поисков требует создания специальной классификационной системы, чему уделяется особое внимание. Хотя важность проблемы иллюстрируется весьма быстрым ростом литературы в области химии, однако главной задачей являются поиски патентов. В Великобритании, по словам Виккери (Vickery), основное внимание уделяется разработке информационных языков. Продолжается развитие универсальной десятичной классификации. Классификационная исследовательская группа в Лондоне разработала специальные фасетные классификации и правила для отбора дескрипторов в стандартизированных информационных языках с учетом связей между терминами. В небольших масштабах проводятся эксперименты с поисковыми механизмами — модифицированными сортировальными счетно-перфорационными машинами; вычислительной машиной, просматривающей перфоленту, полученную на телетайпе одновременно с печатанием рефератов документов; и системой, состоящей из селектора Фильморекс и Флексорайтера. Намечается более полное выявление областей применимости механизированных поисков. Известно, например, что во многих случаях в механизации нуждаются не столько поиски, сколько ввод исходного материала. Механизация поисков важна при установлении связей между химическими и биологическими свойствами веществ, поисках органических соединений и патентов — везде, где имеется сравнительно небольшое количество дескрипторов, но весьма велико число способов их взаимной связи. Для многих библиотечных задач более эффективными являются поиски, проводимые самими людьми. В этой связи возникает проблема механизированного изготовления указателей, обычных по форме, но столь подробных, что документ может быть найден по любому описывающему его дескриптору. Большое внимание, уделяемое в СССР вопросам научно-технической информации, выражается, по словам Александера (Alexander), прежде всего в наличии такого большого централизованного учреждения, каким является ВИНИТИ. Что касается проблемы поисков информации, то здесь скорее можно судить о том значении, которое уделяется ей в ВИНИТИ, чем о средствах, используемых для ее решения. Подход к проблеме сходен с подходом в западных странах, за исключением того, что предпочтение отдается не экспериментам с большими универсальными вычислительными машинами, а конструированию специализированных информационных машин и, в частности, созданию запоминающего устройства большой емкости с неподвижным носителем. Общей для всех стран является та трудность, с которой встречаются ученые при убеждении других в важности и сложности проблемы и необходимости больших усилий для ее решения. В. П. Черенин

См. также: 11А8, 11 А10—11, А14, 11 А17, 11 А38, 11 В284, 11 В294, 11 В295, 11 В297, 11 В298

АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ

(Перед номерами рефератов опущены номер и индекс 11 В выпуска)

А

Айзенштат Б. С. 279
Александров А. В. 231
Алехин В. М. 291

Б

Бахвалов С. В. 300
Башарин Г. П. 198
Белостоцкий А. Я. 282
Большев Л. Н. 59
Бондаренко П. С. 237
Бородин Л. Ф. 185
Брудно А. Л. 142
Будак Б. М. 246
Буледза А. В. 251
Бут Э. Д. 305 К

В

Ванагас В. В. 320 К
Вахания Н. Н. 243
Вертгейм Б. А. 249
Виленкин С. Я. 119
Войлоков В. И. 230
Воробьев Н. Н. 134

Г

Гирсанов И. В. 27
Глембоцкий И. И. 320 К
Гнеденко Б. В. 7
Гольцман Ф. М. 178
Горбунов А. 246
Грушкова Т. 301

Д

Дерендяев И. М. 252
Деркачев А. А. 227
Джоши Д. Д. 187
Дивеев Р. Х. 57, 125
Добрушин Р. Л. 184
Дородницын А. А. 297
Драхлин Е. Х. 248
Дьяконов Е. Г. 234, 235

Ж

Жанбырбаев Б. 15, 16
Жестков С. В. 254

З

Зимба В. В. 266

И

Ибрагимов И. А. 37
Иванова И. М. 186

К

Карапетян А. Х. 208
Кетков Ю. Л. 186
Кишкина З. М. 302
Коваленко И. Н. 194
Комаров А. М. 247
Королюк В. С. 17
Крейнес М. А. 302
Креко Б. 139
Кун Г. У. 165 К

Л

Лапушкін І. Т. 240
Лян Чжи-шуэн 20

М

Мания Г. М. 68
Мартьянова Р. А. 225
Медведев Г. А. 264
Метельский А. С. 279
Мидзуно 145
Миталаускас А. А. 10
Муракава 158

Н

Назаренко Т. И. 250
Немчинов В. С. 164 К

О

Орехов М. Н. 207

П

Пентковский М. В. 299
Петров В. В. 11
Пыхтеев Г. Н. 275

Р

Розенберг Л. А. 32

С

Севастьянов Н. Б. 272
Сироткин Я. А. 296
Скорнева М. И. 32
Слободенюк Н. П. 117
Смирнов Н. В. 111

Т

Таккер А. У. 165 К
Тан Чжэнь 253
Тополянський Д. Б. 224

У

Ушпалис К. К. 320 К

Ф

Фильчаков П. Ф. 292, 306 К

Ц

Цыбаков Б. С. 188

Ш

Шалаевский О. В. 71

Ю

Юшкевич А. А. 24

Я

Ядренко М. И. 35, 36
Ямпольская Т. С. 186

A

Abadie J. 140
Abraham C. T. 183
Ackroyd R. T. 241
Adkinson B. W. 348
Albrecht J. 278
Allais M. 118
Allen W. R. 205
Anderson D. G. 293
Anselone P. M. 12
Atánasiu M. 216
Atkinson C. P. 228

B

Bagley P. R. 330
Bailey L. F. 192
Balakrishnan A. V. 190
Barbut M. 102
Bareiss E. H. 268
Bartholomay A. F. 179
Bartlett M. S. 120
Bashkow T. R. 295
Batschelet E. 85
Beascoechea J. M. 143
Beckmann M. J. 150
Bellman R. 146, 233
Benedict T. R. 189
Beneš V. E. 193
Beran M. J. 175
Berger L. 181
Bhat B. R. 112
Blaauw G. A. 324
Bludman S. A. 173
Blyth C. R. 73
Boley B. A. 281
Bourne C. P. 228
Box G. E. P. 88
Braun J. 289
Bruckshaw J. McG. 6
Brygoo P. 346
Buchholz W. 333
Bühlmann H. 40 Д
Burr E. J. 109

C

Cahn C. R. 191
Campbell L. 286
Carré B. A. 238
Chacon R. V. 18
Chartier F. 60
Chassan J. B. 78
Clark C. E. 39 К, 200
Cleave J. P. 326
Cohen A. C., Jr. 64
Colin A. J. T. 345
Collatz L. 236, 278
Corsten L. C. A. 127
Cramér H. 31
Creasy M. A. 90
Crow E. L. 67

D

Danford M. B. 86
Dantzig G. B. 141
David H. A. 74, 76
Davis P. J. 261
Douglas J., Jr. 232
Driml M. 38
Duddles J. 290
Dulmage A. L. 138
Durand E. 260

E

Ehrenfeucht A. 8
Ehrligh L. W. 242
Elfving G. 91
Epstein B. 61
Erdös P. 2

F

Faden B. R. 347
Faxén K. O. 166 К
Felton G. E. 341
Finney D. J. 217
Fisz M. 8, 108
Flügge W. 314 К
Foguel S. R. 19
Fox L. 322 К
Freiberger W. 115
Freund J. E. 129 К
Friocourt G. 317 К

G

Gardner R. S. 67
Gennart P.-E. 44
Ghelardoni G. 223
Ghurye S. G. 132 К
Gibbons A. 342
Giffler B. 163

Glennie A. E. 328
Gloden A. 255
Golub G. H. 257
Good R. A. 168
Goodman L. A. 69
Gorur V. G. 315
Gower J. C. 209
Graf U. 128 K
Graybill F. A. 89
Grenander U. 115
Gridgeman N. T. 42
Guggenheim E. A. 229

H

Haight F. A. 197
Hamaker H. C. 218
Hammer C. 335
Harter H. L. 75
Haynsworth E. V. 261
Hays S. 130 K
Heathcote C. R. 22
Heck D. L. 82
Hellman M. J. 298
Hellman O. 206
Henning H. J. 128 K
Hoeffding W. 104, 132 K
Holz B. W. 39 K
Huang T. C. 226
Hughes H. M. 86
Hunt G. A. 28

J

Jacobs K. 21
Jaiswal N. K. 196
Jankó B. 256
Jílek M. 98
Juncosa M. L. 233
Juricic H. 263

K

Kalaba R. 147, 233
Kalisch G. K. 135
Kampé de Fériet J. 26
Kantorovich L. V. 167
Karlin S. 199
Keller J. B. 172
Kelly E. J. 34
Kendall D. G. 177
Kendal M. G. 81.
Kerner I. O. 327
Kiefer J. 102
Kivelievitch M. 1
Kjellberg G. 258
Klein M. 155
Knight U. G. W. 157
Koch J. G. 344
Kramer H. P. 33
Krastiņš A. 262
Krickeberg K. 29
Krishna I yer P. V. 107
Kudo A. 79
Kulldorff G. 62
Kulsrud H. E. 239

L

LeCam L. 50
Lefrançois A. 303 K
Leslie P. H. 209
Levine N. 308
Lévy P. 25
Lewis R. M. 172
Likař O. 98
Lindley D. V. 56
Linhart H. 84
Lisman J. H. C. 41
Longman I. M. 309
Lord F. M. 214
Loveday R. 131 K
Lowan A. N. 244
Lucas H. L. 88

M

McNaughton R. 159
McNee R. C. 86
Madow W. G. 132 K
Maezawa S. 307
Mann H. B. 132 K
Maravall Casesnoves D. 169, 170
Marcus M. 261
Marinescu G. 30
Matthys G. 156
Melton B. S. 192
Menconi M. 223
Mendelsohn N. S. 138
Messikommer B. H. 202
Mihoc G. 113
Miller G. F. 321
Miller R. G., Jr. 199, 204
Morishima M. 148
Moyal J. E. 22
Müller F. 318 K
Mullin A. A. 176

N

Nakayama T. 259
Nasr S. K. 121
Naur P. 332
Nedoma J. 38
Nerlove M. 149
Nikaido H. 133

O

Obalski J. 203
Oktaba W. 83
Olkins I., Eds 132 K

P

Pagni P. 3
Park G. T. 72
Parthasarathy K. R. 114
Pawlak Z. 325
Payne W. F. M. 340
Peirce W. H. 277
Peleg B. 136
Perez C. A. 76
Perks M. A. 241
Pompilj G. 92
Porcelli P. 12
Posener D. W. 310
Prabhu N. U. 199
Prins H. J. 47
Pruitt W. E. 89

Q

Quandt R. E. 151

R

Rabinowitz P. 313
Raiffa H. 221 K
Redish K. A. 329
Reißig G. 212
Rényi A. 2, 9
Ricard M. 156
Richter D. 66
Rideout V. C. 189
Riley J. D. 242
Rivlin T. J. 285
Robbins H. 65, 124
Rodeja E. G. 265
Ronaldson P. M. 339
Rosenblatt J. R. 105
Rosenblatt M. 116
Rosenbluth M. N. 173
Rosentiehl P. 160
Rosett R. N. 153
Root W. L. 34
Rottmann K. 319 K
Ruben H. 46
Ruegg A. 5
Ruiz Palá E. 201
Rümke C. L. 126
Rutishauser H. 269

S

Saaty T. L. 195
Sakaguchi M. 49
Salzer H. E. 308
Sarkadi K. 45, 58, 80
Sasieni M. 161
Savage I. R. 97
Savage L. J. 43
Saxena R. B. 271
Schaefer W. 316 K
Schappert H. 294
Schlaifer R. 221 K
Schmalhausen I. I. 210
Schmetterer L. 52, 100
Schneider B. 23
Sen P. K. 53, 63
Senior T. B. A. 174
Sharma A. 287
Simond M. 160
Simonnard M. 144
Singh B. N. 107
Siotani M. 87
Smith G. S. 267
Snelders H. A. M. 77
Solomon H. 213
Spitzer F. L. 13
Stahl A. 180
Stancu D. D. 270, 273
Stein C. 51
Stiefel E. 269
Stone C. J. 13
Stone M. 48, 215
Strang W. G. 242
Sukhatme B. V. 106

T

Takács L. 211
Tate R. F. 54
Theodorescu R. 4
Thionet P. 154
Tolrá J. 201
Troesch B. A. 242

U

Uzawa H. 96, 152

V

Vallet P. 311
Vandewiele L. 70
Varga R. S. 257
Vincze I. 101, 220 K
Vincenz S. A. 6
Vogel W. 122, 123

W

Walsh J. E. 55, 103
Walther A. 294
Watanabe S. 183
Watkins H. R. 137
Watson G. S. 94, 95
Watson K. M. 173
Weeg G. P. 274
Weiss G. 313
Weiss L. 110
Werler K.-H. 343
Wilf H. S. 280
Wilkins J. E., Jr. 245
Wilks S. S. 99
Witte P. de 70
Wolcott N. M. 312
Wolfe P. 141
Woll J. W., Jr. 14
Wutt H. 276
Wynn P. 283, 284

Y

Yokota T. 171
Young P. L. 338

Z

Zanovello R. 222
Ziller A. 288

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ

ИНСТИТУТА НАУЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ АКАДЕМИИ НАУК СССР

ДИРЕКТОР ИНСТИТУТА профессор *А. И. Михайлов*

Реферативный журнал издается в следующих сериях:

АВТОМАТИКА И РАДИОЭЛЕКТРОНИКА — Главный редактор канд. техн. наук *А. С. Бучинский*, АСТРОНОМИЯ И ГЕОДЕЗИЯ — Главный редактор профессор *К. Ф. Огородников*, БИОЛОГИЯ — Главный редактор канд. биол. наук *В. П. Доброхвалов*, ГЕОГРАФИЯ — Главный редактор доктор геогр. наук *А. А. Насимович*, ГЕОЛОГИЯ — Главный редактор профессор *Е. Е. Захаров*, ГЕОФИЗИКА — Главный редактор профессор *И. А. Хвостиков*, ГОРНОЕ ДЕЛО — Главный редактор докт. техн. наук *Е. М. Фаерман*, МАТЕМАТИКА — Главный редактор доктор физ.-матем. наук *В. Р. Гамкрелидзе*, МАШИНОСТРОЕНИЕ — Главный редактор профессор *Ф. С. Демьянюк*, МЕТАЛЛУРГИЯ — Главный редактор член-корреспондент АН СССР *Н. В. Агеев*, МЕХАНИКА — Главный редактор академик *Л. И. Седов*, ТРАНСПОРТ — Главный редактор канд. техн. наук *В. Т. Осипов*, ФИЗИКА — Главный редактор профессор *Э. В. Шпольский*, ХИМИЯ — Заведующий отделом профессор *В. В. Кафаров*, ЭКОНОМИКА ПРОМЫШЛЕННОСТИ — Главный редактор профессор *С. М. Лисичкин*, ЭЛЕКТРОТЕХНИКА И ЭНЕРГЕТИКА — Главный редактор профессор *Б. М. Тареев*

СОДЕРЖАНИЕ

СВОДНОГО ТОМА РЖ «МАТЕМАТИКА» № 11, 1961 г.

11 А. Общие вопросы 11А1
История математики. Персоналия . . . 11А28
Преподавание математики 11А60
Основания математики и математическая логика 11А78
Теория чисел 11А104
Алгебра 11А146
Многочлены и линейная алгебра . . . 11А150
Группы 11А202
Поля, кольца, алгебры и структуры . . 11А223
Алгебраическая теория схем связи и управления . . . . . —
Топология 11А251
Геометрия 11А306
Приложения геометрии 11А308
Элементарная геометрия 11А312
Аналитическая геометрия 11А329
Проективная и неевклидовы геометрии 11А332
Начертательная геометрия 11А351
Алгебраическая геометрия 11А360
Дифференциальная геометрия трехмерного пространства 11А368
Геометрия *n*-мерного пространства . . 11А381
Теория относительности 11А389
Глобальная теория дифференцируемых многообразий 11А421
Метрические методы в геометрии . . . 11А431
Выпуклые многообразия . . . . . —
Авторский указатель
11 Б. Теория функций действительного переменного 11Б1
Теория множеств 11Б10
Приближение функций полиномами и их обобщениями 11Б14
Теория функций комплексного переменного 11Б27
Дифференциальные уравнения
Обыкновенные дифференциальные уравнения 11Б91
Уравнения в частных производных . . 11Б127
Приложения к физике, технике и естественным наукам 11Б173
Интегральные уравнения 11Б212
Вариационное исчисление 11Б220
Анализ (другие вопросы) 11Б231
Числовые ряды 11Б261
Специальные функции 11Б285
Интегральные преобразования и операционное исчисление 11Б301
Приложения общих методов математического анализа 11Б312
Функциональный анализ 11Б325
Авторский указатель
11 В. Теория вероятностей и математическая статистика
Теория вероятностей 11В1
Математическая статистика 11В41
Теория игр, исследование операций и математическая экономика 11В133
Применение теоретико-вероятностных и статистических методов 11В169
Численные и графические методы 11В222
Таблицы 11В307
Вычислительные машины и математические приборы 11В324
Применение вычислительных машин . . —
Авторский указатель

Цена ~~38 к.~~ 24 к. для индивидуальных подписчиков

ОГПТ
П.Ящ. 1598
ТЕХ. БИБЛИОТЕКЕ
7 ... ТР
1962

ОТКРЫТА ПОДПИСКА

НА РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ АКАДЕМИИ НАУК СССР

МАТЕМАТИКА

на 1962 год

ПОДПИСНАЯ ЦЕНА ДЛЯ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ПОДПИСЧИКОВ

на сводный том и выпуски сводного тома

СНИЖЕНА до 25%

Журнал рассчитан на широкий круг математиков и лиц, работающих в смежных с математикой областях науки и техники, и дает информацию об опубликованных в мировой литературе научных работах по всем разделам математики и многим ее приложениям.

К годовому комплекту сводного тома будут изданы авторский и систематическо-предметный указатели.

Для удобства читателей часть тиража сводного тома издается в виде трех выпусков.

Подписка принимается с любого очередного номера.

Условия подписки:

СВОДНЫЙ ТОМ	Для организаций	Для индивид. подписчиков
На год (за 12 номеров с указателями) . . .	30-40	19 00
На 6 мес. (за 6 номеров без указателей) . . .	12-96	8-10

ВЫПУСКИ СВОДНОГО ТОМА без указателей	Для организаций		Для индивид. подписчиков	
	на год	на 6 мес.	на год	на 6 мес.
1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА. ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ. АЛГЕБРА. ТОПОЛОГИЯ. ГЕОМЕТРИЯ	9-36	4-68	5-88	2-94
2. АНАЛИЗ	10-80	5-40	6-72	3-36
3. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ. КИБЕРНЕТИКА	5-76	2-88	3-60	1-80

Подписка принимается без ограничения в пунктах подписки «Союзпечать», почтамтах, конторах и отделениях связи, общественными уполномоченными на заводах, фабриках и шахтах, в учебных заведениях и учреждениях.

Заказы можно направлять также в Отдел подписки и реализации Производственно-издательского комбината **ВИНИТИ** по адресу:

г. Москва, Люберцы-6, Октябрьский проспект, 403
Р/сч. 58526 в Люберецком отделении Госбанка г. Москвы